

公務員試験

過去問攻略Vテキスト・問題集

数的処理（上）[第2版]

TAC公務員講座 編

体験入学用抜粋版

【ご案内】

当教材は、体験入学用の抜粋版で、**数的処理の第1～2回講義**の該当範囲の内容となっております。

公務員試験 **第2版**

過去問攻略Vテキスト **16**

TAC公務員講座 編

数的処理(上)

● はしがき

本シリーズのねらい——「過去問」の徹底分析による効率的な学習を可能にする

合格したければ「過去問」にあたれ。

あたりまえに思えるこの言葉の、ほんとうの意味を理解している人は、じつは少ないのかもしれませんが。過去問は、なんとなく目を通して安心してしまうものではなく、徹底的に分析されなくてはならないのです。とにかく数多くの問題にあたり、自力で解答していくうちに、ある分野は繰り返し出題され、ある分野はほとんど出題されないことに気づくはずです。ここまできて初めて、「過去問」にあたれ、という言葉が自分のものにできたといえるのではないでしょう。

頻出分野が把握できたなら、もう合格への道筋の半分まで到達したといっても過言ではありません。時間を効率よく使ってどの分野からマスターしていくのか、計画と戦略が立てられるはずです。

とはいえ、教養試験も含めると 20 以上の科目を学習する必要がある公務員試験では、過去問にあたれといっても時間が足りない、というのが実状ではないでしょうか。

そこで TAC 公務員講座では、みなさんに代わり全力を挙げて、「過去問」を徹底分析し、この『過去問攻略Vテキスト』シリーズにまとめあげました。

網羅的で平板な解説を避け、不必要な分野は思いきって削り、重要な論点に絞って厳選収録しています。また、図表を使ってわかりやすく整理されていますので、初学者でも知識のインプット・アウトプットが容易にできるはず。

『過去問攻略Vテキスト』の一冊一冊には、“無駄なく勉強してぜったい合格してほしい”という、講師・スタッフの思いが込められています。公務員試験は長く孤独な戦いではありません。本書を通して、みなさんと私たちは合格への道を一緒に歩いていくことができます。そのことを忘れないでください。そして、必ずや合格できることを心から信じています。

2019年2月 TAC 公務員講座

● 第2版（大改訂版） はしがき

長年、資格の学校 TAC の公務員対策講座で採用されてきた『過去問攻略Vテキスト』シリーズが、このたび大幅改訂されることになりました。

◆より、過去問攻略に特化

資格の学校 TAC の公務員講座チームが過去問を徹底分析。合格に必要な「標準的な問題」を解けるようにするための知識を過不足なく掲載しています。

『過去問攻略Vテキスト』に沿って学習することで、「やりすぎる」ことも「足りない」こともなく、必要かつ十分な公務員試験対策を進められます。

合格するために得点すべき問題は、このテキスト 1冊で対策できます。

◆より、わかりやすく

執筆は資格の学校 TAC の公務員講座チームで、受験生指導に当たってきた講師陣が担当。受験生と接してきた講師が執筆するからこそ、どこをかみ砕いて説明すべきかがわかります。

読んでわかりやすいこと、講義で使いやすいことの両面を意識した原稿づくりにこだわりました。

◆より、使いやすく

- ・本文デザインを全面的に刷新しました。
- ・「過去問 Exercise」などのアウトプット要素も備え、知識の定着と確認を往復しながら学習できます。
- ・TAC 公務員講座の講義カリキュラムと連動。最適な順序でのインプットができます。

ともすれば 20 科目以上を学習しなければならない公務員試験においては、効率よく試験対策のできるインプット教材が不可欠です。『過去問攻略Vテキスト』は、上記のとおりそのニーズに応えるべく編まれています。

本書を活用して皆さんが公務員試験に合格することを祈念しております。

2022年3月 TAC 公務員講座

● ― 〈数的処理（上）〉 はしがき

本書は近年の大卒区分公務員試験で合格点をを目指すすべての人に向けて書かれた数的処理テキストです。上巻では、数的推理、判断推理を扱っています。

数的処理は公務員試験に占める配点比率が高いことから、合格のためにはおろそかにできない重要科目です。一方で実際の公務員試験を眺めると、実に多様な問題が出題されており、こんなに解けるようになるのかと不安に感じる受験生もいるでしょう。また、一部の分野では数学を道具として使いますが、これに苦手意識のある初学者は、数学や算数からやり直さなければならないのか、と悩んでしまうかもしれません。それも無理からぬことであり、数的処理は多くの受験生にとって負担になる科目ではないでしょうか。

このたびの大改訂では、掲載している問題を TAC 公務員講座の講義で実際に使われているものに厳選し、少ない演習で多くの問題が解けるように一層の工夫をしました。各節の冒頭では要点や知識の整理を行い、代表的な例題を通して、問題の「型」を見せています。しかし、すぐにこれが解けなくても大丈夫です。「正解へのプロセス」で問題文の読み方から解説してありますので、これを読んだ後しばらく考えてみてください。それでも正解できない場合は、解説を読んで理解ができれば十分です。

この理解の助けになるのが、「正解へのプロセス」から「解説」にわたって設けた「タグ」です。タグは問題を解く核心です。判断推理や空間把握と呼ばれる分野など、数的処理には通常の学校教育では触れることのない分野も含まれます。このような分野では、型で問題を分類し、タグで示した手法を繰り返し実践することでスムーズに解答できるようになります。

そのうえで節末に設けた過去問 Exercise に取り組み、吸収してきた知識と解き方の型を実践することで、さらに定着させてください。前から順に読んでいけば、徐々に必要な知識が積み上げられ、本書を読み終わるころには実力が定着するように問題を配置しました。

本書では、数的処理の出題の多くを、独自の分類で「型」として類型化しています。型から漏れるものや出題頻度の低い問題、難度が高いため正答率が低く合否を左右しない問題は省きました。ですから、本書に掲載されている問題は合格に必要な最低限のものであると思って取り組んでください。その取り組みそのものが、合格に最大の効果を発揮します。

また、数的処理で用いる算数・数学をはじめとした知識は本書に掲載してあります。高度なものは1つありませんから、食わず嫌いをせず、どんどん使い慣れてください。本書をしっかりと読み込めば、数少ない数的処理の基礎事項だけで、様々なレベル、様々な試験の問題が解けるようになることを実感できるはずです。

2022年3月 TAC 公務員講座

本書の使い方

本書は、本試験の広範な出題範囲からポイントを絞り込み、理解しやすいよう構成、解説した基本テキストです。以下は、本書の効果的な使い方ガイドです。

本文

●アウトライン

その節のアウトラインを示しています。これから学習する内容が、全体の中でどのような位置づけになるのか、留意しておくべきことがどのようなことなのか、あらかじめ把握したうえで読み進めていきましょう。

●脚注

試験とは直接関係しないものの、学習にあたって参考にしてほしい情報を「脚注」として適宜示しています。

★★★

4 速 さ

「速さ」は文章題の一分野であり、公務員試験でも頻出テーマです。そこで、学習を容易にするために、「旅人算（出会い算と追いかけ算）」、「周回算」、「流水算」、「通過算」、「仕事算」、「ニュートン算」など、定番のテーマに分類しています。解法は、今までに学んだ手法を使っていますが、単位変換などの新しい手法も登場します。

1 速さの3要素と3公式

1 速さの問題

速さの問題では、ある「速さ」で、いくらかの「時間」をかけて、ある「距離」を移動する人や車などが登場する。この「速さ」、「時間」、「距離」の3要素に関する式を使いながら、未知のものを求める問題が出題される。以下では、速さの問題で登場する3要素とその関係について説明する。

① 速 さ

「速さ」とは、**単位時間あたりの変化量**を表したものである¹。

単位時間とは、1秒、1分、1時間、1日、…など、「1」の付く時間のことである。

- ・ 1秒あたりの変化量を「秒速」という。
- ・ 1分あたりの変化量を「分速」という。
- ・ 1時間あたりの変化量を「時速」という。

特に、**移動における速さは、単位時間あたりの移動距離で定義される。**

以下では、特に断りがない限り、移動における速さを考える。

② 速さの3要素

移動における速さを考えるとき、**速さ・時間・距離(道のり)**を「**速さの3要素**」という。

¹ 例えば、ウイルスが増殖する速さやうわさが広がる速さなど、速さには様々なものがある。公務員試験では、仕事の速さなども登場する（後述）。

●重要度

各種公務員試験の出題において、この節の内容がどの程度重要かを示していますので、学習にメリハリをつけるための目安として利用してください。



例1

一定の速さで歩く人が、200mを5分で移動したとき、この人の歩く速さは1分あたり $200 \div 5 = 40$ [m]である。

また、分速40mで歩く人が200mを移動するには、 $200 \div 40 = 5$ [分]かかる。分速40mで歩く人が5分歩くと、 $40 \times 5 = 200$ [m]移動する。

この例からもわかるように、速さの3要素の間には互いにつながり(関係式)がある。これが、次の「速さの3公式」である。

③ 速さの3公式

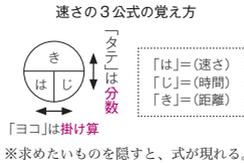
次の3つの式を「速さの3公式」という。

速さの3公式

$$(\text{速さ}) = (\text{距離}) \div (\text{時間}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$$

$$(\text{時間}) = (\text{距離}) \div (\text{速さ}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{速さ})}$$

$$(\text{距離}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間})$$



※ 1つの式からスタートして変形すれば、残りの2つの式は簡単に導出できる。

2 単位換算

速さの問題を解く際に、単位(基準)を揃える必要が生じる。このとき、次のように単位換算を行う。

① 時間について

$$1 \text{ 時間} = 60 \text{ 分}, \frac{1}{60} \text{ 時間} = 1 \text{ 分}$$

$$1 \text{ 分} = 60 \text{ 秒}, \frac{1}{60} \text{ 分} = 1 \text{ 秒}$$

より、図1のように単位換算できる。

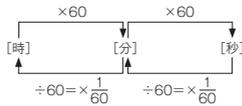


図1

(※図はいずれもサンプルです)

●例

具体例を挙げながら知識やテクニックを実践する様子を示しています。

●公式・知識

覚えておきたい公式や知識についてまとめています。

例題

●問題

ここまでの学習内容を身に付けられているかをチェックするための、TACオリジナル問題です。まずは自分で考えてみましょう。

例題 1-14

ある遊園地では、開園前に行列が300人以上できた場合には、時間を繰り上げて開園することになっている。その日は開園前から入園希望者が毎分20人の割合で並び始めたので、開園前に行列が300人となり、その時点で開園した。開園後も同様の割合で行列に加わる者が続いたが、入場口を1つだけ開けたところ、15分で行列が解消した。入場口を2つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間として、正しいのはどれか。

- 1 3分
- 2 5分
- 3 7分
- 4 9分
- 5 11分

正解へのプロセス

本問は、入り口に滞った人を入場口が捌く処理の速さの問題であり、入り口には時々刻々人が流れ込むため、**全体量が増加**することがわかる。したがって、本問は「ニュートン算」の問題である。 **テーマの把握**

ニュートン算では公式を使って立式していけばよい。 **解法のポイント**

本問は「行列が解消することから、処理が終了するので、

$$(\text{はじめの量}) + (\text{増加の速さ}) \times (\text{時間}) - (\text{減少の速さ}) \times (\text{時間}) = 0$$

を用いる。 **公式**

そこで、ニュートン算の公式に対応する量を問題文を読みながら確認していく。

「その日は開園前から入園希望者が毎分20人の割合で並び始めたより、(増加の速さ) = 20 [人/分]である。「開園前に行列が300人となり、その時点で開園した」より、「その時点」がこの問題の処理のスタート(「はじめ」)になるので、(はじめの量) = 300 [人]である。「入場口を1つだけ開けたところ」、「入場口を2つ開けて」とあるので、入場口が「処理」を行っており、入場口が複数ある。このように、処理するものが複数あるときは、1つあたりで処理できる量を考えると立式がうまくいく。つまり、(入場口1つあたりの処理(減少)の速さ) = x [人/分]とおけば、「入場口を1つだけ開けたところ」の(処理(減少)の速さ) = x [人/分]であり、2つ開けると2倍の速さで処理できることより、「入場口を2つ開けて開園していたときの(処理(減少)の速さ) = $2x$ [人/分]と表せる。

そして、「入場口を2つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間」 = t [分]

●正解へのプロセス

問題を解くための着眼点や考えの進め方、それぞれの段階でこれまでに習得したどの知識を使うべきかなど、問題の正解に至るためのプロセスを具体的に示しています。問題への取り組み方をある程度パターン化して捉えられるよう、**テーマの把握**、**公式**など、検討のポイントになる要素を「タグ付け」しています。また、その問題特有の解法などについては、**1**、**2**などのアイコンで示しています。

はしがき Ⅲ	
第2版(大改訂版)はしがき Ⅳ	
〈数的処理(上)〉はしがき Ⅴ	
本書の使い方 Ⅵ	

第1章 数的推理

1 数的推理の基本	2
2 文章題の基本	5
3 比、割合、平均、濃度	26
4 速 さ	55
5 整数の性質	121
6 様々な整数の問題	160
7 場合の数	184
8 確 率	222
9 平面図形	247

第2章 判断推理

1 判断推理の基本	302
2 集 合	305
3 命題と論理	343
4 対応関係	367
5 勝 敗	427
6 数量推理	458
7 順序関係	478
8 位置関係	531
9 暗 号	589
10 嘘つき発言	609

付録 様々な計算 663

索引 674

第 1 章

数的推理

数的推理は、数学的な知識(算数、数学)を用いて、計算しながら解答する分野です。数的推理だけではありませんが、数的処理で重要な能力は、論理的な処理能力です。数的推理であっても、用いる数学的知識に高度なものは一切ないので、数学的な能力より、問題に書かれている内容や選択肢を見て、問われていることを明確にし、情報を整理する国語的な能力の方が重要になります。

数的推理は数的処理全体の基礎に相当する分野でもあるため、必要な知識は本書で一から説明しています。じっくり取り組んでみてください。

1

数的推理の基本

この節では、第1章(数的推理)の中で通して使う知識やテクニックを紹介します。本書を丹念に読み進めていけば、ここでまとめた内容が数的推理に限らず数的処理全体で使い続ける知識やテクニックであることに気づくはず。この節の内容を常に念頭に入れながら本書を読み進めましょう。

数的推理では、次の大きな5個のポイントに留意しながら問題を解いていくとよい。そこで第1章では、さらに細かく10個のポイントに分類し、各ポイントを明示するために10種類の「記号」でタグ付けした。

1 テーマの把握

文章をよく読んで、情報を正確に読み取る。「テーマの把握」

重要な条件には、アンダーラインを引いたり、「囲み」を付けたりしながら、文章に書かれている内容や問題の「^{かた}型」から、テーマを把握する。

2 目標の設定・選択肢のチェック

① 目標(求めたい量や知りたい量)を明確にする。「目標」

② 問題文を読んだあとは、選択肢も必ずチェックするようにする。「選択肢」

選択肢はその問題の目標そのものである。したがって、問題文を読むときは必ず選択肢を見る習慣をつけるようにしたい。また、公務員の択一試験は選択肢が五肢択一であるから、正解が必ず1つ含まれる。見方を変えれば、選択肢は問題を解くヒントになり得る。

3 公式や解法のポイント

問題のテーマや型に応じて公式や解法のポイントを覚える。「公式」「解法のポイント」

4 場合分け

「Aが成り立つ」場合を考えるときは、必ず「Aが成り立たない」場合を考えるようにすることが、場合分けの基本である。 **場合分け**

5 テクニック

問題の内容を「正確に」、「具体的に」イメージができることが、問題をスムーズに解くカギになる。そこで問題を解くテクニックとして、数的推理では次の4つのテクニックを頻繁に使い、それぞれ、次のような4つのタグで表す。

具体化 **基準** **作図** **表**

1 具体化

① 名前を付けて具体化する

人やものをアルファベットでA、B、C、…と順序付けする、数字で①、②、③、…とナンバリングする、などしながら具体化するとよい。

② 文字をおく

未知数があれば、この**未知数に文字をおくことで具体化**する。

「目標(求めたい量や知りたい量)」= x とおくのは、定石の1つである。

※ x には、例えば「 x [人]、 x [円]、 x [個]」などの単位を付けるだけで具体的になる。一方で、文字のおきすぎに注意する。文字のおきすぎは、計算が大変になるばかりでなく、何を求めればよいのか迷ってしまい、正解にたどり着くのに遠回りしてしまう。

③ 数値を代入して、具体的に計算する

例えば、選択肢に正解を含む値が並んでいる場合は、1つずつ代入して確かめるのも一手である。もちろん時間がかかる場合もあるので、選択肢の絞り込みを行い、代入する値が少なくなるように工夫したい。

2 基準

代表的なテーマとして、割合(第3節)が挙げられるが、**基準を1つ定めることにより、他のものを相対的に数値で表せる(定量化)**。

3 作図

数的処理(数的推理)では様々な図が登場する。**問題のテーマに応じて、どのような図を描くべきかを覚えておく**ようにする。

4 表

条件など、問題文から読み取るべき情報量が多い場合は、**表に整理しながら**解くとよい。

定石として、表には行と列の合計の欄を設けるようにする。合計が問題を解く力ギになることもある。

2

文章題の基本

この節では数的処理の土台である文章題の基本を学びます。特に、方程式、不等式は数的推理だけでなく、数的処理のあらゆる分野で使う道具であるので、その基本をしっかりとマスターしましょう。

1 連立方程式

1 文章題の解き方

文章題では、文章を読んで状況把握をし、問題のテーマや型に応じて、図や表などにまとめたり、未知数や求めたい量に文字をおくなどして解いていく。

① 文字の種類

代表的な文字のおき方は次の通りである。

①未知数	・ x 、 y 、 z 、…など ・ 時間(time)に関する未知数は t を用いることもある
②名称に対応する文字	・ 名称に合わせて文字をおく(例: Aさんの年齢 = a [歳])
③整数、自然数(正の整数)	・ n 、 m 、…など ¹
④偶数	・ $2n$
⑤奇数	・ $2n - 1$
⑥連続する2整数	・ n と $n + 1$
⑦比例定数	・ k 、 l 、 m 、 n 、…など

② 未知数の数と方程式の数

通常、未知数(文字)の数と方程式の数²が等しいとき、解が1組定まる。つまり、未知数の数だけ独立した方程式(これを連立方程式という)を立てれば、解が1組に定まる。

1 数(number)や自然数(natural number)の頭文字を取って n と表すことが多い。

2 方程式の数として、方程式を変形して得られたものはカウントしない。変形して得られた方程式を「従属した方程式」といい、従属した方程式は元の方程式と実質「同じもの」である。

※ 未知数には「隠れた条件」が存在することもある。例えば「人数は自然数（正の整数）である」や「10進法（第5節）での各位の数字は0～9の10種類の数字で表される」などのように、問題に明記はされていないが、当たり前のことが隠れた条件になることがある。

③ 年齢算

文章題には様々なテーマが存在するが、公務員試験で出題されるテーマの1つに「年齢算」がある。「10年後の年齢はAがBの2倍になる」のような、何年か前や後の年齢に関する文章題を「年齢算」という。年齢算では、次式を用いて立式する。

年齢算の公式

$$[(\text{今日からピッタリ})n\text{年前の年齢}] = (\text{現在の年齢}) - n \text{ [歳]}$$

$$[(\text{今日からピッタリ})n\text{年後の年齢}] = (\text{現在の年齢}) + n \text{ [歳]}$$

2 連立方程式とその解法のポイント

① 一文字ずつ消去

連立方程式の解の求め方は一文字ずつ未知数(文字)を消去することが原則である。

② 代入法と加減法

未知数(文字)の消去には代入法と加減法の2つの方法がある。

例1

次の連立方程式の解を代入法、加減法を使ってそれぞれ求めよ。

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$$

① 代入法

一方の式を x または y についてまとめ(これを「 x または y について整理する」という)、もう一方の式に代入することで、一文字ずつ消去する方法が代入法である。

下の式を移項して $x = 2y$ とし、上の式に代入すれば、左辺は $2 \times 2y - 3y = 4y - 3y = y$ となり、上の式は $y = 1$ となる。移項した下の式 $x = 2y$ に $y = 1$ を代入して、 $x = 2$ を得る。

よって、この連立方程式の解は $x = 2$ 、 $y = 1$ である。

② 加減法

x または y の係数(x や y などの文字に掛けられた数)をそろえて、2つの式を足したり引いたりして、一文字ずつ消去する方法が加減法である。

下の式の両辺を2倍して上の式と並べ、2つの式を足し算する。このとき、足し方は x の項どうし、および y の項どうしを足す。この計算により、 x の項が消去され、その結果、下のように $y = 1$ を得る。

$$\begin{array}{r} 2x - 3y = 1 \\ +) -2x + 4y = 0 \\ \hline y = 1 \end{array}$$

あとは、 $-x + 2y = 0$ に $y = 1$ を代入して移項すれば、 $x = 2$ を得る。

よって、この連立方程式の解は $x = 2$ 、 $y = 1$ である。

例題 1-1

あるコンサートではA席、B席の2種類のチケットを販売しており、チケット1枚あたりの価格はA席が8,000円、B席が6,000円である。販売期間終了後の発表では、2種類で合計2,000枚販売し、1,360万円の売上があったという。A席のチケットは何枚売れたか。

- ① 500枚
- ② 600枚
- ③ 700枚
- ④ 800枚
- ⑤ 900枚

正解へのプロセス

① 問題文の読み方

本問は本書の第1問目なので、問題文の読み方から解説していく。

問題文を読みながら、**問題のテーマも読み取る。** **テーマの把握**

その際、

- ① **読み間違いの起きやすいところ** (例えばいつも自分が間違えてしまうところ) に**波線**を引いたり、**数値条件などの重要情報**に**アンダーライン**や**囲み**などを入れておく。
 - ② **目標**を明確にする。 **目標**
 - ③ **選択肢**をチェックする。 **選択肢**
- の3点を常に行う。

本問のテーマは「**連立方程式**」であり、具体的には次のように行うとよい。

「あるコンサートではA席、B席の2種類のチケットを販売しており、チケット1枚あたりの価格は **A席が8,000円**、**B席が6,000円** である。販売期間終了後の発表では、**2種類で合計2,000枚販売**^{条件①}し、**1,360万円の売上があった**^{条件②}という。A席のチケットは何枚売れたか。 **目標**」

② 文字のおき方

本問では求めるもの(目標)がA席のチケットの販売枚数であり、さらにA席とB

席の販売枚数がわからないもの(未知数)である。そこで、A席の販売枚数を x [枚]、B席の販売枚数を y [枚]とおく。

未知数は x と y の2文字であるから、独立した2式の方程式を立てなければ連立方程式の解が1組に定まらない。本問では「2種類で合計2,000枚販売^{条件①}し、1,360万円の売上があった^{条件②}」が2つの条件であり、これらから2式の方程式を立てる。

※ A席のチケットの販売枚数を x [枚]とおくと、条件①より、B席の販売枚数は $2,000-x$ [枚]と表してもよい。

解説

(A席のチケットの販売枚数) $=x$ [枚]、(B席のチケットの販売枚数) $=y$ [枚]とおく。 **目標**

このとき、「2種類で合計2,000枚販売した」ので、次の式で表せる³。

$$x + y = 2000 \text{ [枚]} \cdots \text{①(条件①に対応した式)}$$

また、「チケット1枚あたりの価格はA席が8,000円、B席が6,000円である」ことと「1,360万円の売上があった」ので、これは次の式で表せる。

$$8000x + 6000y = 13600000 \text{ [円]} \cdots \text{②(条件②に対応した式)}$$

②は両辺を2,000で割ることで係数を小さくできる。

$$4x + 3y = 6800 \cdots \text{③}$$

① $\times 3$ の計算により、 $3x + 3y = 6000 \cdots \text{④}$ として、③の y の係数である3に揃える。

加減法を用い、③ $-$ ④で $3y$ を消去すれば、

$$\begin{array}{r} 4x + 3y = 6800 \\ -) 3x + 3y = 6000 \\ \hline x = 800 \end{array}$$

となり、A席のチケットの販売枚数は800枚であることがわかる。 **解法のポイント**

※ ①より、 $y = 1200$ [枚]となるが、求める必要はない。

正解 4

³ 以下では、数式内の3桁ごとのカンマ[.]は煩雑であるため取り除く。

2 不定方程式

1 不定方程式

未知数の数が方程式の数より多いとき、解が定まらない(これを「不定」という)。このような方程式を「不定方程式」という。

数的処理の不定方程式の問題では、解に「自然数」や「0以上の整数」という隠れた条件が付くので、これを利用して解くことが多い。多くの場合、**隠れた条件は問題文に明記されていない**ので注意深く問題文を読む必要がある。

2 不定方程式の解法のポイント

① 選択肢を利用する

選択肢に正解を含む値が並んでいるときは、**選択肢を1つずつ代入**していくとよい。

② 一文字ずつ消去

連立の不定方程式であっても、連立方程式の解法と同様に、**一文字ずつ未知数を減らす**。

③ 整数の性質と絞り込み

解が「**自然数**」や「**0以上の整数**」であることや**倍数**に着目することで、**解の範囲を絞り込む**。

※ 整数の性質に関して、詳しくは第5節で扱う。

例2

方程式 $2x + 3y = 17$ の解が自然数であるとき、解をすべて求めよ。

y は自然数であり、 $3y$ は17より小さいので、 $y = 1, 2, 3, 4, 5$ に絞り込める。偶数と奇数の性質に注意する⁴。偶数と奇数の足し算では、

$$\begin{cases} (\text{偶数}) + (\text{偶数}) = (\text{偶数}) \\ (\text{偶数}) + (\text{奇数}) = (\text{奇数}) \\ (\text{奇数}) + (\text{奇数}) = (\text{偶数}) \end{cases}$$

である。 x は自然数であるから、 $2x$ は偶数であり、17は奇数である。したがって、 $2x + 3y = 17$ は、 $(\text{偶数}) + 3y = (\text{奇数})$ であり、上の2つ目の式から、 $3y$ は奇数といえる。したがって、 $y = 1, 3, 5$ に絞り込める。あとは具体的に計算していくと次のようになる。

$$\cdot y = 1 \text{ のとき、} 2x + 3 \times 1 = 17 \text{ より } x = 7$$

$$\cdot y = 3 \text{ のとき、} 2x + 3 \times 3 = 17 \text{ より } x = 4$$

$$\cdot y = 5 \text{ のとき、} 2x + 3 \times 5 = 17 \text{ より } x = 1$$

よって、 $2x + 3y = 17$ の自然数の解は $(x, y) = (7, 1), (4, 3), (1, 5)$ である。

⁴ 偶数と奇数についても、第5節で後述する。

例題 1-2

太郎君は1個90円のリングを、花子さんは1個130円のリングをそれぞれ何個かずつ買ったところ、2人が支払った代金の合計は8,100円であった。

このとき、花子さんが買ったリングの個数として、あり得るのはどれか。

- 1 48個
- 2 50個
- 3 54個
- 4 58個
- 5 63個

正解へのプロセス

① 文字のおき方と目標の設定

本問では、未知数は太郎君と花子さんの買ったリングの個数である。そこで、太郎君の購入したリングの個数を x [個]、花子さんの購入したリングの個数を y [個]とおく。このとき、「花子さんが買ったリングの個数として、あり得るものはどれか」とあるので、求めたいのは y である。 **目標**

② テーマの把握

条件「支払った代金の合計は8,100円であった」より、 $90x + 130y = 8100$ [円]…①と立式できる。

未知数(文字)が x 、 y の2つに対して、方程式が①の1つしか立たず、**未知数の数が方程式の数より多い**ので、「不定方程式」の問題であることがわかる。

テーマの把握

③ 選択肢の検討と絞り込み

本問の選択肢には、花子さんの購入したリングの個数 y [個]について、「あり得るもの」が1つだけ含まれている。そこで、**選択肢を1つずつ代入**していく。 **選択肢**

このとき、 x と y が個数(自然数)であることより、**倍数に着目**することで、**解の範囲が絞り込み**、代入する選択肢を減らすことができる。

解説

太郎君の購入したリンゴの個数を x [個]、花子さんの購入したリンゴの個数を y [個]とおく。 **目標**

題意より、 $90x + 130y = 8100$ [円] …①と立式できる。

係数を小さくするために、①の両辺を10で割ると、次式になる。

$$9x + 13y = 810 \quad \dots ②$$

x と y が自然数であることに着目すれば、 $9x$ は9の倍数であり、 $13y$ は13の倍数である。

②の各項で共通する**倍数に注目**する。 **解法のポイント**

810も9の倍数であることから、移項して右辺に9の倍数を集めると、②は $13y = 810 - 9x = 9(90 - x)$ …③と変形できる。すると、③の右辺は9の倍数であるから、等号で結ばれた③の左辺も(13の倍数でもあるが)9の倍数となり、 y は9の倍数である。

選択肢を見ると、9の倍数でない①、②、④はあり得ない。よって、③の $y = 54$ [個]か⑤の $y = 63$ [個]に絞り込める⁵。 **選択肢** **解法のポイント**

$y = 54$ [個]のとき、②に代入すれば $x = 12$ [個]となり、 x 、 y のいずれも自然数であるが、 $y = 63$ [個]のとき、 $x = -1$ [個]となり、 x が自然数とならず不適である。 **場合分け**

正解 ③

5 ③の $y = 54$ [個]か⑤の $y = 63$ [個]に絞り込めた時点で、どちらか一方の値だけを②に代入すればよい。代入する数値は、計算の簡単な方(一般的には数値の小さい方)を選ぶとよい。

3 不等式

1 不等式の文章題

① 不等式の立式

大小関係を表す条件を式で表す。

- ① 「AはBより大きい(多い)」は「 $A = \boxed{\text{Bより大きな値}} > B$ 」と表せる。
したがって、「 $A > B$ 」である。 ※ $A = B$ は含まない
- ② 「AはBより小さい(少ない)」は「 $A = \boxed{\text{Bより小さな値}} < B$ 」と表せる。
したがって、「 $A < B$ 」である。 ※ $A = B$ は含まない
- ③ 「AはB以上である」は「 $A = \boxed{\text{B以上の値}} \geq B$ 」と表せる。
したがって、「 $A \geq B$ 」である。 ※ $A = B$ を含む
- ④ 「AはB以下である」は「 $A = \boxed{\text{B以下の値}} \leq B$ 」と表せる。
したがって、「 $A \leq B$ 」である。 ※ $A = B$ を含む
- ⑤ 「AはB未満である」は「 $A = \boxed{\text{B未満の値}} < B$ 」と表せる。
したがって、「 $A < B$ 」である。 ※ $A = B$ は含まない

② 間違いやすい例

間違いやすい例を挙げておく。文章の意味を理解しながら立式すること。

- ① 「PはQより5歳年上だ」は「 $P = Q + 5$ [歳]」と表せる。
- ② 「PはQより5歳以上年上だ」は「 $P = Q + \boxed{5\text{[歳以上]}} \geq Q + 5$ [歳]」と表せる。
したがって、「 $P \geq Q + 5$ [歳]」である。
- ③ 「PはQより5歳年下だ」は「 $P = Q - 5$ [歳]」と表せる。
- ④ 「PはQより5歳以上年下だ」は「 $P = Q - \boxed{5\text{[歳以上]}} \leq Q - 5$ [歳]」と表せる。
したがって、「 $P \leq Q - 5$ [歳]」である。

※ 「PはQより n (だけ)大きい」は、不等式ではなく等式「 $P = Q + n$ 」で表せる。
「大きい」や「小さい」という言葉だけで「不等式である」と誤って判定しないようにすること。

2 不等式とその解法のポイント

① 不等式の計算

不等式の計算では、方程式の計算と同様に、移項して「 $x \geq \dots$ 」や「 $x \leq \dots$ 」の形に変形していく。**負の数を掛ける(割る)と不等号の向きが逆になる。**

例①： $3 > -5$ の両辺に -1 を掛けると $-3 < 5$ となる。

例②：不等式 $-2x \geq 6$ を解くとき、両辺に $-\frac{1}{2}$ を掛ける(-2 で割る)と、不等号の向きが変わり、 $x \leq -3$ となる。

② 絞り込み

不等式によって**範囲を絞り込める。**

例③： $12 < x \leq 16$ を満たす自然数 x は $x = 13, 14, 15, 16$ である。

3 過不足算(過不足の不等式)

不等式の定番問題の一つであり、「AをBに配分すると、Aに過剰分や不足分が発生する」という条件から、不等式を立式する問題を「**過不足算(過不足の不等式)**」という。次の例題で過不足算の問題の型を見ていく。

例題 1-3

ある本数の鉛筆を子どもたちに配ることにした。それぞれの子どもに3本ずつ配ると32本余り、4本ずつ配ると15本より多く余った。そこで、6本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した。このとき、子どもの人数として正しいのはどれか。

- ① 13人
- ② 14人
- ③ 15人
- ④ 16人
- ⑤ 17人

正解へのプロセス

① テーマの把握

本問では求めるものが子どもの人数なので、**子どもの人数を x [人]**とする。【目標】
「それぞれの子どもに3本ずつ配ると32本余り」^{条件①}、4本ずつ配ると15本より多く余った」^{条件②}。そこで、6本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した」^{条件③}という条件から、「**過不足算**」の問題であることがわかる。【テーマの把握】

② 過不足算の図

上の条件①～③を図示すると下図ようになる。【作図】
このとき、鉛筆の本数の合計に当たる部分を二重かぎ括弧(『 』)で挟んで表しており、**赤色の線**は過剰も不足もなく「ピッタリ」配られたことを表す(以下「**ピッタリライン**」と呼ぶ)。



③ 過不足算の立式

まずは条件①を立式する。ピッタリラインまで $3 \times x$ [本]配ったことになるので、余りの32本を合わせれば、鉛筆の本数は $3x + 32$ [本]となる。

次に条件②を立式する。ピッタリラインまで $4 \times x$ [本]配ったことになる。また、「15本より多く余った」は「+ 15本より多い本数」と表現する。囲みの部分に入る数字は16、17、…であるので、**具体化**、「15本より多い本数 > 15 本」と表せる。したがって、「(鉛筆の本数) $= 4x +$ 15本より多い本数 $> 4x + 15$ 」と表せる。

最後に条件③を立式する。仮にピッタリラインまで配ったとすれば、 $6 \times x$ [本]配ったことになるが、鉛筆の本数の合計は、ピッタリラインより左側にある二重かぎ括弧の右側(↓)まで戻すように計算しなければいけない。そこで、「15本以上不足した」を「- 15本以上の本数」と表現する。囲みの部分に入る数字を書き出せば、15、16、17、…であるので、**具体化**、負の数を掛けると不等号の向きが入れ替わることに注意すれば、「- 15本以上の本数 ≤ -15 本」と表せる。したがって、「(鉛筆の本数) $= 6x -$ 15本以上の本数 $\leq 6x - 15$ 」と表せる。

解説

子どもの人数を x [人]、配った鉛筆の本数の合計を y [本]とする。 **目標**

「それぞれの子どもに3本ずつ配ると32本余り」とあるので、この条件は $y = 3x + 32$ [本] …①と表せる。

「4本ずつ配ると15本より多く余った」とあるので、この条件は $y = 4x +$ 15本より多い本数 $> 4x + 15$ 、つまり、 $y > 4x + 15$ …②と表せる。

「6本ずつ配ると鉛筆が15本以上不足した」とあるので、この条件は $y = 6x -$ 15本以上の本数 $\leq 6x - 15$ 、つまり、 $y \leq 6x - 15$ …③と表せる。

①を②と③に代入し、**yを消去**すれば、 $3x + 32 > 4x + 15$ …④および $3x + 32 \leq 6x - 15$ …⑤となる。④で $32 - 15 > 4x - 3x$ のように移項して整理すれば、 $x < 17$ となり、⑤で $32 + 15 \leq 6x - 3x$ のように移項して整理すれば、 $x \geq \frac{47}{3}$ となる。ま

とめると、 $\frac{47}{3} \leq x < 17$ となる。 $\frac{47}{3} = 15.666\dots$ より、 $15.666\dots \leq x < 17$ と x の範囲を絞り込め、これを満たす人数(自然数) x は16しかない。 **解法のポイント**

正解 4

問題1

ある家では、ペットボトルの天然水を毎月8本消費する。従来はすべてスーパーで購入していたが、通信販売で6本入りケースを購入すると、1本当たりの価格はスーパーの半額であり、別途、1回の配送につき、ケース数にかかわらず一律の配送料金がかかることが分かった。また、毎月、通信販売で1ケースを、スーパーで残り2本を購入すると月ごとの経費は従来より300円安くなり、3か月間に2回、通信販売で2ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなることが分かった。このとき、スーパーでの1本当たりの価格はいくらか。

国家専門職2010

- 1 160円
- 2 180円
- 3 200円
- 4 220円
- 5 240円

解説

正解 5

目標は「スーパーでのペットボトルの天然水1本当たりの価格」である。 **目標**

また、「毎月、通信販売で1ケースを、スーパーで残り2本を購入すると月ごとの経費は従来より300円安くなり^{条件①}」、「3か月間に2回、通信販売で2ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなる^{条件②}」のように、価格に関する2つの条件がある。条件が2つなので、未知数に対応する文字は最低2つ設定できる。そこで、目標である、「スーパーでのペットボトルの天然水1本当たりの価格」を x [円/本]とおく。このとき、「通信販売で6本入りケースを購入すると、1本当たりの価格はスーパーの半額」になるので、通信販売における天然水1本当たりの価格は $0.5x$ [円/本]である。また、通信販売では1回の配送につき、ケース数にかかわらず一律の送料がかかるので、2つ目の未知数に対応する文字として、この送料を y [円/回]とおく。この2文字 (x と y) だけで、2つの条件を表すことができるので、本問は「連立方程式」の問題であることがわかる。

テーマの把握

条件①「毎月、通信販売で1ケース(6本)を、スーパーで残り2本を購入すると月ごとの経費は従来(8本すべてをスーパーで購入)より300円安くなり」を式にすれば、

$$(0.5x \times 6 + y) + x \times 2 = x \times 8 - 300$$

となり、整理すれば、 $y = 3x - 300$ …①が成り立つ。

条件②「3か月間に2回、通信販売で2ケースずつ購入すると月ごとの平均経費は従来より680円安くなる」とあるので、3か月の合算で式を立てれば、条件②は、

$$(0.5x \times 6 \times 2 + y) \times 2 = x \times 8 \times 3 - 680 \times 3$$

となり、整理すれば、 $y = 6x - 1020$ …②が成り立つ。

①、②を連立して解くと、 y を消去して、 $3x - 300 = 6x - 1020$ となり、移項して整理すれば、 $x = 240$ [円/本]となる。

※ $y = 420$ [円] となるが、求める必要はない。

問題2

両親と3姉妹の5人家族がいる。両親の年齢の和は、現在は3姉妹の年齢の和の3倍であるが、6年後には3姉妹の和の2倍になる。また、4年前には父親と三女の年齢の和が、母親・長女及び次女の年齢の和と等しかったとすると、現在の母親・長女及び次女の年齢の和はどれか。

特別区I類2006

-
- 1 42
 - 2 44
 - 3 46
 - 4 48
 - 5 50

解説

正解 5

何年か前や後の年齢に関する文章題であるから、「**年齢算**」の問題である。

テーマの把握

条件ア：「両親の年齢の和は、現在は3姉妹の年齢の和の3倍」

条件イ：「両親の年齢の和は、6年後には3姉妹の和の2倍になる」

条件ウ：「4年前には父親と三女の年齢の和が、母親・長女及び次女の年齢の和に等しかった」

5人家族各々の年齢を未知数とすると、未知数に対応する文字が5つも必要になってしまう。

そこで、冒頭の2つの条件ア、イより、現在の両親の年齢の和、現在の3姉妹の年齢の和をそれぞれ x [歳]、 y [歳]とおき、**おく文字をなるべく少なくする**。

条件アより、 $x = 3y \cdots \textcircled{1}$ と表せる。

条件イより、 $x + 6 \times 2 = (y + 6 \times 3) \times 2 \cdots \textcircled{2}$ と表せる。

未知数が x 、 y の2つに対し、独立した方程式が2式あるので、解が1組求められる。 **解法のポイント**

$\textcircled{1}$ を $\textcircled{2}$ に代入して x を消去すれば、 $3y + 12 = 2y + 36$ より、移項すれば $y = 24$ となり、 $x = 3 \times 24 = 72$ を得る。ゆえに、 $x =$ 「現在の両親の年齢の和」 $= 72$ [歳]、 $y =$ 「現在の3姉妹の年齢の和」 $= 24$ [歳]である。これにより、現在の家族5人の年齢の合計は、 $72 + 24 = 96$ [歳]になる。

ここで、現在の母親・長女及び次女の年齢の和を z [歳]とする。 **目標**

現在の父親と三女の年齢の和は $96 - z$ [歳]と表せる。したがって、「4年前の父親と三女の年齢の和」 $= (96 - z) - 4 \times 2$ [歳]、「4年前の母親・長女及び次女の年齢の和」 $= z - 4 \times 3$ [歳]と表せる。

ここで、条件ウより、 $(96 - z) - 4 \times 2 = z - 4 \times 3$ が成り立ち、これを解けば、 $z = 50$ [歳]である。

問題3

80円、30円、10円の3種類の切手を、合わせて30枚、金額の合計でちょうど1,640円になるように買いたい。このような買い方に合致する切手の枚数の組合せは何通りか。

国家一般職2012

-
- 1 1通り
 - 2 2通り
 - 3 3通り
 - 4 4通り
 - 5 5通り

解説

正解 2

買う枚数をそれぞれ、80円切手を x [枚]、30円切手を y [枚]とおく。目標「3種類の切手を合わせて30枚」買うので、10円切手を買う枚数は $30 - x - y$ [枚]である。

金額の合計に関する式を作ると、次のようになる。

$$80x + 30y + 10 \times (30 - x - y) = 1640 \text{ [円]}$$

整理すれば、 $7x + 2y = 134 \cdots \textcircled{1}$ となる。未知数が x 、 y の2つに対し、方程式が1つしかないので、「不定方程式」の問題である。テーマの把握

①を倍数がわかりやすいように変形すると、次のようになる。

$$7x = 2(67 - y) \cdots \textcircled{2}$$

②より、 $67 - y$ は0より大きく67より小さい7の倍数であり、具体的に書き出せば、 $67 - y = 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63$ が考えられる。

解法のポイント

「切手は合わせて30枚」であるから、30円切手の枚数である y [枚]は少なくとも30より小さい数である。そこで、具体的に書き出した上の数のうち、 y が30を超えるものを除けば、 $67 - y$ として考えられるのは、42、49、56、63の4つに絞り込める。「切手は合わせて30枚」であるから、 $x + y$ も30より小さい数である。したがって、この4つの数をそれぞれ②の $(67 - y)$ に代入して、 $x + y$ が30より小さい数になる場合を検討してみる。具体化 場合分け

(1) $67 - y = 42$ のとき、 $y = 25$ で、②より $7x = 2 \times 42$ となり、 $x = 12$ である。

このとき、 $x + y = 37 > 30$ となり、不適である。

(2) $67 - y = 49$ のとき、 $y = 18$ で、②より $7x = 2 \times 49$ となり、 $x = 14$ である。

このとき、 $x + y = 32 > 30$ となり、不適である。

(3) $67 - y = 56$ のとき、 $y = 11$ で、②より $7x = 2 \times 56$ となり、 $x = 16$ である。

このとき、 $x + y = 27 < 30$ となり、10円切手の枚数は $30 - x - y = 3$ [枚]

で条件を満たす。

(4) $67 - y = 63$ のとき、 $y = 4$ で、②より $7x = 2 \times 63$ となり、 $x = 18$ である。

このとき、 $x + y = 22 < 30$ となり、10円切手の枚数は $30 - x - y = 8$ [枚]

で条件を満たす。

よって、買い方は(3)、(4)の2通りである。

問題4

ある催し物の出席者用に6人掛けの長椅子と4人掛けの長椅子を合わせて21脚用意した。6人掛けの長椅子だけを使って6人ずつ着席させると、36人以上の出席者が着席できなかった。6人掛けの長椅子に5人ずつ着席させ、4人掛けの長椅子に4人ずつ着席させると、12人以上の出席者が着席できなかった。また、6人掛けの長椅子に6人ずつ着席させ、4人掛けの長椅子に4人ずつ着席させると、出席者全員が着席でき、席の余りもなかった。このとき、出席者の人数として、正しいのはどれか。

東京都I類2017

-
- 1 106人
 - 2 108人
 - 3 110人
 - 4 112人
 - 5 114人

解説

正解 2

余り(過剰分)や不足についての条件が与えられるので、本問は「**過不足算**」の問題である。 **テーマの把握**

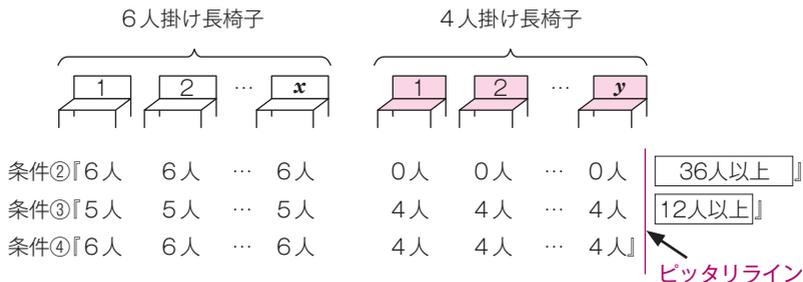
6人掛けの長椅子と4人掛けの長椅子の数をそれぞれ x [脚]、 y [脚]とし、出席者の人数を z [人]とする。 **目標**

最初の条件「6人掛けの長椅子と4人掛けの長椅子を合わせて21脚用意した^{条件①}」より、 $x + y = 21$ …①が成り立つ。

条件「6人掛けの長椅子だけを使って6人ずつ着席させると、36人以上の出席者が着席できなかつた^{条件②}」より、 $z = 6x + \boxed{36人以上} \geq 6x + 36$ 、つまり、 $z \geq 6x + 36$ …②が成り立つ。

次に、条件「6人掛けの長椅子に5人ずつ着席させ、4人掛けの長椅子に4人ずつ着席させると、12人以上の出席者が着席できなかつた^{条件③}」より、 $z = 5x + 4y + \boxed{12人以上} \geq 5x + 4y + 12$ 、つまり、 $z \geq 5x + 4y + 12$ …③が成り立つ。

また、最後の条件「6人掛けの長椅子に6人ずつ着席させ、4人掛けの長椅子に4人ずつ着席させると、出席者全員が着席でき、席の余りもなかつた^{条件④}」より、出席者の人数は $6x + 4y$ [人]であることがわかる。つまり、 $z = 6x + 4y$ …④とする。以上の条件を図示すれば、次のようになる。 **作図**



④を②と③に代入し z を消去すれば、 $6x + 4y \geq 6x + 36$ および $6x + 4y \geq 5x + 4y + 12$ である。これを整理すると、それぞれ、 $y \geq 9$ 、 $x \geq 12$ を得る。この不等式の中で条件①を満たすのは、等号の成立する $x = 12$ [脚]、 $y = 9$ [脚]のときしかない。

よって、出席者の人数は④より $z = 6 \times 12 + 4 \times 9 = 108$ [人]である。

3

比、割合、平均、濃度

この節でも引き続き、数的処理の土台を学習します。とりわけ、割合の応用である「損益算」、「濃度と混合」の問題は、数的処理の定番問題なので、しっかりマスターしましょう。

1 比

1} 比とその解法のポイント

いくつかの0でない数や数量の関係を表したものを「比」といい、 $a:b$ のように表す。比の等式を「比例式」という。

比は、式全体に同じ数を掛けたり、同じ数を割ったりすることで、簡単な比に直すことができる。

例1

$3:4$ は全体を3倍すれば $9:12$ になり、 $3:4$ は全体を4倍すれば $12:16$ になる。したがって、次式が成り立つ。

$$3:4=9:12=12:16$$

逆に、 $12:16$ は全体を4で割れば($\frac{1}{4}$ 倍すれば) $3:4$ になり、 $9:12$ は式全体を3で割れば($\frac{1}{3}$ 倍すれば) $3:4$ になる。したがって、次式が成り立つ。

$$12:16=9:12=3:4$$

当然だが、2つの式は同じである。

① 比の具体化

比が与えられたときは、各数量を比例定数 k の一文字だけを使って表すことができる。

例えば、X社への出資額(単位は[万円])として、A社とB社とC社の出資比率がそれぞれ $5:3:2$ であることがわかっていたとしても、(A社の出資額) $=5$ [万円]、(B社の出資額) $=3$ [万円]、(C社の出資額) $=2$ [万円]であるのか、(A社の出資額) $=5000$ [万円]、(B社の出資額) $=3000$ [万円]、(C社の出資額) $=2000$

[万円]であるのかはわからない。そこで、(A社の出資額) = $5k$ [万円]、(B社の出資額) = $3k$ [万円]、(C社の出資額) = $2k$ [万円]とおくと、「A社とB社とC社の出資比率がそれぞれ5 : 3 : 2」を**具体的な値**として表現できる。

なお、(A社の出資額) = x [万円]、(B社の出資額) = y [万円]、(C社の出資額) = z [万円]として、 $x : y : z = 5 : 3 : 2$ とすることもできるが、この場合、文字は x 、 y 、 z の3つが必要になる。一方、上記の k 倍する方法では文字を k の1つで済ませることができ、文字を少なくすることができる。

② 2数の比例式の変形

例えば、 $20 : 15 = 4 : 3$ であるが、比の外側の2数(20と3)の積は $20 \times 3 = 60$ であり、内側の2数(15と4)の積は $15 \times 4 = 60$ となり、2つの積の値が一致する。このように、2数の比例式では、「(外項の積) = (内項の積)」が成り立つ。つまり、 $a : b = c : d$ では $a \times d = b \times c$ が成り立つ。このようにして、比例式を方程式に変形することができる。

例2

$x : 4 = 5 : 9$ を満たす x は(外項の積) = (内項の積)より、 $x \times 9 = 4 \times 5$ と変形することで、 x の1次方程式に変形できる。これを解けば、 $x = \frac{20}{9}$ となる。

2 連比

3つ以上の数の比を、1つの比例式にまとめて表したものを「**連比**」という。

例3

$A : B = 2 : 3$ 、 $B : C = 2 : 3$ のとき、 $A : B : C$ をまとめて、簡単な比に直せばどうなるだろうか。

登場する文字どうしを比較できるように、両方の比の式に登場する文字の数値を揃える。そこで、次のように、両方の比の式に登場する文字と、これに対応する数値が上下に揃うように並べる。

$$\begin{array}{l} A : B = 2 : 3 \\ B : C = 2 : 3 \end{array}$$

Bが両方の比の式に登場する。Bに対応する数値が上下それぞれで、3と2であ

るから、最小公倍数に統一してA、B、Cを比較できるようにする。そのために、上の式の右辺を2倍、下の式の右辺を3倍すれば、

$$\begin{aligned} A : B &= 4 : \boxed{6} \\ B : C &= \boxed{6} : 9 \end{aligned}$$

のように、Bを「6」に統一できる。まとめると、 $A : B : C = 4 : 6 : 9$ となる。

※ 最小公倍数に関して、詳しくは第5節で扱う。

3 逆比

逆数の比を「逆比」という。

① 2数の逆比

$a : b$ の逆比は $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ である。 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b}$ に ab を掛ければ、 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} = b : a$ となり、

2数の逆比は比の並びが逆になる。

② 3数の逆比

$a : b : c$ の逆比は $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ である。 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$ に abc を掛ければ、 $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} : \frac{1}{c} = bc : ca : ab$ となり、3数の逆比の場合は比の並びが逆にはならない。

4 分数式と比例式

例えば、 $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ のとき、 $a = 3k$ 、 $b = 2k$ ($k \neq 0$)¹と表せる。

したがって、

$$a : b = 3k : 2k = 3 : 2$$

である。

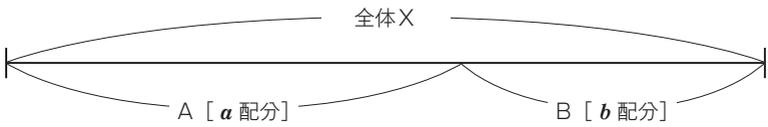
このように、分数式は比例式に直すことができる。

¹ 0で割ることはできないため、分数の分母は0でない。したがって、 $\frac{b}{a}$ の分母 a は0でない。これより $a = 3k$ の k も0でない。

5 比例配分

全体XをAとBにそれぞれ $a : b$ に比例配分するときは、下図のように線分図を描くとわかり易い。

比例配分には2つの解法がある。次の例で具体的に確認していきたい。



例4

240本の鉛筆をAとBにそれぞれ2 : 3に比例配分する。このとき、A、Bには何本ずつ配分すればよいだろうか。

線分図を描くと次のようになる。



[解法1]

次のように解く。 $A = 2k$ [本]、 $B = 3k$ [本]と具体化して、 $240 = 2k + 3k$ より、 $5k = 240$ から $k = 48$ を得る。よって、 $A = 2 \times 48 = \underline{96}$ [本]、 $B = 3 \times 48 = \underline{144}$ [本]ずつ配分すればよい。

[解法2]

次のように解く。240本を $(2 + 3 =) 5$ 等分すると、1等分あたり $240 \div 5 = 48$ [本]である。これをAには2個分、Bには3個分配分して、 $A = 2 \times 48 = \underline{96}$ [本]、 $B = 3 \times 48 = \underline{144}$ [本]である。

例題 1-4

兄と弟の貯金額の比は5:3であった。ところが、兄はそこから7,500円使い、弟は逆に1,000円貯金したので、兄と弟の貯金額の比は3:4になった。兄のはじめの貯金額として、正しいのはどれか。

- ① 10,000円
- ② 12,500円
- ③ 15,000円
- ④ 17,500円
- ⑤ 20,000円

正解へのプロセス

貯金額の比は、はじめは兄:弟=5:3であり、おわりは兄:弟=3:4になっている。条件は2つあり、兄のはじめの貯金額が問われているので、はじめの兄の貯金額を x [円]、はじめの弟の貯金額を y [円]とおいて、連立方程式で解くこともできる。【目標】しかし、本問は「比」の問題であるから、兄と弟のはじめの貯金額を、それぞれ $5k$ [円]、 $3k$ [円]とおくとよい。【解法のポイント】この方が、文字が少なくなり計算も簡単になる。

解説

兄と弟のはじめの貯金額を、それぞれ $5k$ [円]、 $3k$ [円]とおく。

【目標】 【解法のポイント】

兄はそこから7,500円使い、弟は逆に1,000円貯金して、兄と弟の貯金額の比が3:4になったので、次の式が成り立つ。

$$(5k - 7500) : (3k + 1000) = 3 : 4$$

(外項の積) = (内項の積) より、 $4 \times (5k - 7500) = 3 \times (3k + 1000)$ となる。

【解法のポイント】

これを解けば、 $k = 3000$ を得る。よって、兄のはじめの貯金額は $5 \times 3000 = 15000$ [円]である。

正解 ③

2 割合

1 割合の解法のポイント

基準となる量に対する、ある量の比率を「割合」という。小数、分数、比、百分率、歩合などを用いて表す。

① 基準

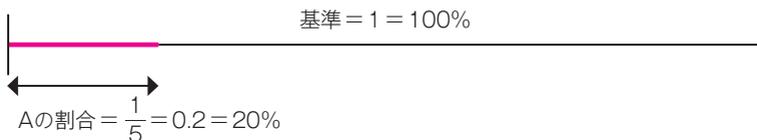
割合を考える上で最も大事なのは、「基準は何か？」である。

基準に具体的な値が与えられている場合を除けば、(基準) = 1 として割合を分数(や小数)で表現することが多いが、状況に応じて(基準) = 100 (100%)で表すこともある。

分数・小数	1	$\frac{1}{10}=0.1$	$\frac{1}{100}=0.01$	$\frac{1}{1000}=0.001$
百分率[%]	100%	10%	1%	0.1%
歩合	10割	1割	1分 <small>ぶ</small>	1厘 <small>りん</small>

② 線分図

割合を図示するときは、線分図を描くとよい(下図)。



2 割合の様々な表現

① 割合の基本表現

$$\text{「Aに対するBの割合[%]」} = \text{「BのAに対する割合[%]」} = \frac{B}{A} \times 100$$

※ 「Aに対する」とある場合、Aが「基準=分母」である。

② 合格率、競争率

$$\text{(合格率[%])} = \frac{\text{(合格者数)}}{\text{(受験者数)}} \times 100, \text{(競争率[倍])} = \frac{\text{(受験者数)}}{\text{(合格者数)}} \text{で求められる。}$$

3 損益算(売買算)

割合にも様々な文章題がある。とりわけ、「**損益算(売買算)**」と呼ばれる、売買(利益や損失)に関する文章題は公務員試験をはじめ、様々な試験に登場する重要なテーマである。次の表にある用語を理解しておきたい。

損益算(売買算)に関する用語

価格	①原価	仕入れの価格
	②定価	はじめに付けた価格
	③販売価格(売価)	定価や割引価格など、売るときの価格の総称
売上		(販売価格)×(販売個数)の総和
総利益(利益合計)		(総利益)=(売上)-(原価合計)=(利益小計)の総和

4 増 減

次の例で具体的に見ていくが、「～%増し(～%増)」、「～割引(～割減)」と増減の付いていない「～%」、「～割」を読み間違えないようにする。

例5

次の□□□□にあてはまる数字はいくらか。

- ① 500円の3割増しは□ア□円である。
- ② 7,200円の25%引きは□イ□円である。
- ③ □ウ□円の5割増しは6,000円である。

- ① 500円が基準である。

500円の3割は、 $500 \times 3割 = 500 \times 0.3 = 150$ [円] に相当する。したがって、□ア□には $500 + 150 = 650$ [円] が入る。なお、これを1つの式にすると、 $500 \times (1 + 0.3) = 500 \times 1.3 = 650$ [円] である。

- ② 7,200円が基準である。

7,200円の25%は、7,200円の $\frac{1}{4}$ であり、4で割った1,800円が相当する。したがって、□イ□には、7,200円から1,800円を引いた5,400円が入る。あるいは、7,200円の25%引きは、7,200円の75%になるから、これを1つの式にすると、 $7200 \times (1 - 0.25) = 7200 \times 0.75 = 7200 \times \frac{3}{4} = 5400$ [円] である。

- ③ □ウ□円が基準である。

□ウ□ = x [円] とすれば、 x 円の5割増しは6,000円であるから、 $x \times (1 + 0.5) = 6000$ [円] である。これを解けば、 $x = 6000 \div 1.5 = 6000 \div \frac{3}{2} = 6000 \times \frac{2}{3} = 4000$ [円] である。

例題 1-5

7,200円で品物をいくつか仕入れ、1個あたり600円で全部売って、仕入れ総額の25%の利益を見込んだ。しかし、実際には何個かを600円で売り、残りを5%値引きして売ったため、全体で仕入れ総額の20%の利益しか得られなかった。このとき、600円で売った品物の個数として、正しいのはどれか。

- ① 1個
- ② 2個
- ③ 3個
- ④ 4個
- ⑤ 5個

正解へのプロセス

- ① 損益算では、利益は「プラス (+)」で、損失は「マイナス (-)」で数値化する。
- ② 損益算は割合に関する問題の一種である。したがって、「5%値引き」などの増減に関する言葉が出てきたときは、「何に対する割合なのか?」を、つまり、**割合の基準が何か**を考えるようにしたい。 **基準**
「値引き」は値段から引くことであるから、本問でははじめに付けた値段(定価)である600円から5%引くと読み取る。
- ③ 損益算では、登場する条件や数値が多いので、必要に応じて線分図や表などを作成して整理をするとよい。 **表**

解説

600円で売れた品物の個数を x [個]とする。 **目標**

25%の利益を見込んで1個あたり定価600円で売ったので、(原価) \times (1 + 0.25) = (定価)より、1個あたりの原価は、(原価) $= 600 \div 1.25 = 600 \div \frac{5}{4} = 600 \times \frac{4}{5} = 480$ [円]である。また、仕入れ総額が7,200円であるので、仕入れた個数は $7200 \div 480 = 15$ [個]である。

定価600円の5%引きの割引価格は $600 - 600 \times 5\% = 600 - 600 \times 0.05 = 570$ [円]であり、仕入れ総額の20%の利益とは $7200 \times 20\% = 7200 \times 0.20 = 1440$ [円]である。

以上より、1個あたりの利益は、定価の600円の場合は $600 - 480 = 120$ [円]、割引価格の570円の場合は $570 - 480 = 90$ [円]だけ生じる。これらを表に整理すると、下のようになる。表

		価格	個数	利益	利益小計
原価		480円/個	15個	0円/個	
売 価	定価	600円/個	x [個]	120円/個	$120 \times x$ [円]
	割引価格	570円/個	$15 - x$ [個]	90円/個	$90 \times (15 - x)$ [円]

条件より、総利益について立式すれば、 $120 \times x + 90 \times (15 - x) = 1440$ [円]となり、これを解けば $x = 3$ [個]である。

正解 3

3 平均

1 平均値

数量の凹凸を「平らに均し」、不揃いでないようにすることを「平均する(平均を取る)」といい、その値を平均値という。

① 平均値と合計

平均値は数量の合計(総和)を均等に分けることで定められる。

平均値と合計

【平均の定義】

$$(\text{平均値}) = \frac{(\text{数量の合計})}{(\text{個数(人数)})}$$

これを変形すれば、

【平均と合計の公式】

$$(\text{数量の合計}) = (\text{平均値}) \times (\text{個数(人数)})$$

となる。

② 仮平均

平均値を計算するとき、数量の合計が大きくなる場合がある。このような大きな数量の合計を求めることを回避するために、**仮の平均値(仮平均)**を設定して、**真の平均値を計算する方法を「仮平均法」という。**

仮平均法を用いるとき、真の平均値は次のように計算できる。

仮平均の公式

$$\begin{aligned}(\text{真の平均値}) &= (\text{仮平均}) + \frac{\{(\text{各数量}) - (\text{仮平均})\} \text{の合計}}{\text{個数}} \\ &= (\text{仮平均}) + [\{(\text{各数量}) - (\text{仮平均})\} \text{の平均}]\end{aligned}$$

簡単に書き直せば、

$$(\text{真の平均値}) = (\text{仮平均}) + (\text{仮平均との差の平均})$$

※ **ただし、ここでの(差の平均)の「差」は符号(+、-)を含む量**である。次の例の【解法2】を参照してもらいたい。

例6

A君がこれまでに受けた8回のテストの結果は、以下の表の通りであった。この後2回テストを受けて、全10回の平均点を80点としたい。このとき、残り2回で取らなくてはならない平均得点はいくらか。

回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
点数	75	86	73	67	92	78	76	85	?	?

【解法1】 「平均の定義」や「平均と合計の公式」を用いて計算する

10回の平均点を80点にしたいので、10回の合計点が何点になればよいかを考える。

(合計点) = (平均点) × (回数) で求められるので、全10回で、 $80 \times 10 = 800$ [点] 取ればよいことがわかる。8回目までの合計点が $75 + 86 + 73 + 67 + 92 + 78 + 76 + 85 = 632$ [点] であるので、残り2回で $800 - 632 = 168$ [点] 取ればよい。

したがって、残り2回の平均点は、(平均値) = $\frac{\text{合計}}{\text{回数}}$ より、(平均点) = $\frac{168}{2} = 84$ [点] となる。

【解法2】 仮平均法を用いて計算する

仮平均を80点と設定すると、(仮平均との差) = (各数量) - (仮平均) は次表のようになる。

回	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
点数	75	86	73	67	92	78	76	85	?	?
仮平均との差	-5	+6	-7	-13	+12	-2	-4	+5		

したがって、1回目から8回目までの{(仮平均との差)の合計}は、 $-5 + 6 - 7 - 13 + 12 - 2 - 4 + 5 = -8$ [点] となる。なお、(仮平均との差)や{(仮平均との差)の合計}にはマイナスの場合がありうることに注意してもらいたい。

(真の平均値) = (仮平均) + (仮平均との差の平均) であり、ここでは、(真の平均値) = (仮平均) = 80 [点] であるので、(仮平均との差の平均) = 0 [点] になればよい。

(仮平均との差の平均) = $\frac{\{(各数量) - (仮平均)\}の合計}{回数}$ = $\frac{-8[点] + (9回目の点差) + (10回目の点差)}{10} = 0[点]$ より、(9回目の点差) + (10回目の点差) = 8 [点] であればよく、9回目と10回目の平均で $\frac{8}{2} = 4 [点]$ 多く取ればよいことになる。よって、残り2回で平均 $80 + 4 = 84 [点]$ 取ればよい。

③ 平均値の異なる集団の全体の平均値

平均値の異なる2つの集団があり、2つの集団を合わせた「**全体の平均値**」を求めるときは、各集団の合計を求めることで、全体の合計や全体の平均値が求められる。

例7

あるテストについて、下表のように2クラスのデータが与えられたとき、全体の平均点はいくらか。

あるテストの2クラスのデータ

	Aクラス	Bクラス	全体
平均点	75点	80点	?
人数	20人	30人	50人
合計	1500点	2400点	3900点

このとき、全体の平均点 = $\frac{75 \times 20 + 80 \times 30}{20 + 30} = \frac{3900}{50} = 78 [点]$ となる。

④ 平均値とバランス

何人かで食事に行って割り勘するときの金額は平均額である。割り勘をする理由は「**バランスを取る**」ことに他ならないが、このことから推測できるように、

$$(平均値) = (バランスする位置)$$

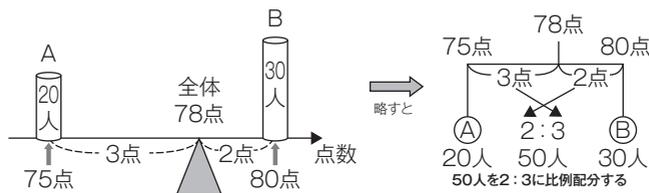
という見方ができ、これが次に述べる天秤法の原理である。

2 天秤法と天秤図

前述のとおり、「平均を取る」とは「バランスを取る」ことである。バランスをイメージする方法として、シーソーや天秤を描くとわかりやすい。全体の平均値をバランスする位置として図示したものが「天秤図」である。

例7に出てきた表をグラフにすると次の図である。

図では、人数が「シーソー・天秤の腕に乗るおもりの重さ」に、点差が「腕の長さ」に、全体の平均点が「平衡点(バランスする位置=重心)」に対応している。この考え方を「天秤法」という。



※ 「ぶら下がりのおもり」で描いた右図は左図のシーソーの図の略図である。

この図からもわかるように、A、Bの各クラス平均点と全体の平均点までの点差(3点および2点)が、クラス的人数(20人および30人)の逆比になっている。つまり、3点：2点＝30人：20人が成り立っている。

これは、一般の場合でも成り立ち、天秤法では各集団の平均値と集団全体の平均値の差を「腕の長さ」とすれば、

$$(Aの腕の長さ) : (Bの腕の長さ) = (Bの要素の数) : (Aの要素の数)$$

とまとめられる。

4 濃度と混合

1 食塩水

食塩水とは食塩＋水であり²、食塩水の濃度や食塩の重さについての問題が公務員試験では出題される。

① 食塩水の濃度

食塩水の濃度とは、**食塩水全体に占める食塩の割合[%]**である(次の図をイメージ)。よって、濃度の基準は食塩水全体である。

食塩水の濃度、食塩の重さ

【食塩水の濃度の定義】

$$(\text{食塩水の濃度} [\%]) = \frac{(\text{食塩の重さ} [\text{g}])}{(\text{食塩水の重さ} [\text{g}])} \times 100 [\%]$$

【食塩の重さの公式】

$$(\text{食塩の重さ} [\text{g}]) = (\text{食塩水の重さ} [\text{g}]) \times \frac{(\text{食塩水の濃度} [\%])}{100 [\%]}$$



② 条件の読み替え

以下のように問題の条件を読み替えると解きやすくなる。

- ① 「食塩を加える」＝「濃度100%の食塩水を混ぜる」
- ② 「水を加える」＝「濃度0%の食塩水を混ぜる」
- ③ 「蒸発させる」＝「水のみを抜く」＝「濃度0%の食塩水を引く」

² 砂糖水も、砂糖水＝砂糖＋水である。

2 食塩水の混合と天秤法

2つの食塩水を混合すると、混合後の濃度は均一化される。したがって、
 (混合後の濃度) = (平均値) = (バランスする位置)
 として天秤図で図示できる。これを表したものが次の図である。

食塩水の混合と天秤法

【天秤法】

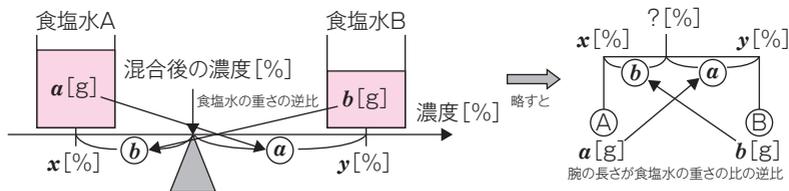
2つの食塩水A、Bを混ぜるとき、混合前の食塩水の重さの比と濃度変化の比は**逆比**の関係になる。つまり、

$$\begin{aligned} (Aの混合前後の濃度変化) : (Bの混合前後の濃度変化) \\ = (Bの重さ) : (Aの重さ) \end{aligned}$$

が成り立つ³。

【天秤図】

天秤法をもとに図を描いたものが天秤図である。



³ この式は、(混合後の濃度 [%]) = $\frac{(Aの重さ) \times (Aの濃度 [%]) + (Bの重さ) \times (Bの濃度 [%])}{(Aの重さ) + (Bの重さ)}$ を変形することで得られる。

例題 1-6

3%の食塩水と8%の食塩水を混ぜ合わせ、6%の食塩水を500g作りたい。このとき、3%の食塩水は何g混ぜればよいか。

- 1 180g
- 2 200g
- 3 250g
- 4 270g
- 5 300g

正解へのプロセス

食塩水の混合に関する問題の解法は大きく2つある。

[解法1] 混合後の食塩の重さの**合計**と食塩水の重さの**合計**に着目して解く。このときは**表を書いて考える**とわかり易い。 **表**

[解法2] **天秤法**で解く。2つの食塩水を混合すると、混合後の濃度は均一化される。(混合後の濃度) = (平均値) = (バランスする位置)より、**天秤図を描いて考える**とわかり易い。 **作図**

解説

[解法1] 食塩の重さの**合計**と食塩水の重さの**合計**に着目して解く

3%の食塩水と8%の食塩水をそれぞれA、Bとして、A、Bの重さをそれぞれ x [g]、 y [g]とおく。 **目標**

混合前後の濃度、食塩水の重さ、食塩の重さを以下のような**表に整理**する。 **表**

	A	B	全体
濃度[%]	3%	8%	6%
食塩水[g]	? = x [g]	y [g]	500g
食塩[g]	$x \times 0.03$ [g]	$y \times 0.08$ [g]	$500 \times 0.06 = 30$ [g]

食塩水の重さの**合計**について、 $x + y = 500$ [g]、食塩の重さの**合計**について、 $0.03x + 0.08y = 30$ [g]が成り立ち、2つの式を連立方程式として解けば、 $x = 200$ [g]、 $y = 300$ [g]である。

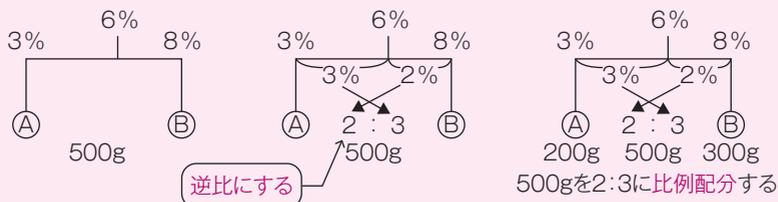
[解法2] 天秤法で解く

濃度変化が3%から6%の3%と、8%から6%の2%であるので、濃度変化の比はA : B = 3% : 2% = 3 : 2である。

食塩水の重さの比と濃度変化の比は逆比の関係にあるので、(Aの重さ) : (Bの重さ) = 2 : 3である。 **解法のポイント**

これをもとに**天秤図**を描いていけば、左から右の順に作図できる。 **作図**

食塩水の重さは両方合わせて500gであるから、500gを2 : 3に**比例配分**する。500gを2 + 3 = 5 [等分]すれば、1等分あたり500 ÷ (2 + 3) = 100 [g]であるから、2 : 3 = 200g : 300gに**比例配分**すればよい。したがって、3%の食塩水が200g、8%の食塩水が300gである。



正解 2

問題1

ある高校で一年生全体に対して、現時点で考えている将来の進路について「進学希望」、「就職希望」、「未定」のいずれかを選択するようにアンケートを取ったところ、ア、イ、ウの結果を得た。「未定」を選択した生徒は何人か。

国家専門職2001

- ア 一年生全体の生徒数と、「進学希望」と「就職希望」を選択した生徒数の合計の比は、5：4である。
- イ 「就職希望」を選択した生徒数と一年生全体の生徒数の比は、9：50である。
- ウ 「進学希望」を選択した生徒数は248人である。

- 1 50人
- 2 60人
- 3 70人
- 4 80人
- 5 90人

解説

正解 4

全体はある高校の一年生であり、一年生を「進学希望」、「就職希望」、「未定」の3つに分けて、人数比を考える。3つの比が登場するので、本問は「**連比**」の問題である。**テーマの把握**

未定を選択した生徒数を x [人] とおく。**目標**

条件アとイの比の中で、共通している項目である「一年生全体」を利用して作図し、**連比**を作ると、次のようになる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{(就職希望者数)} & & \text{(一年生全体の生徒数)} & & \text{(進学希望者数)+(就職希望者数)} & & \\
 9 & : & 5 & : & 4 & & \\
 9 & : & 50 & : & 40 & & \leftarrow 10\text{倍する}
 \end{array}$$

(一年生全体の生徒数) = (進学希望者数) + (就職希望者数) + (未定者数) であり、(一年生全体の生徒数) の比の値は50、(進学希望者数) + (就職希望者数) の比の値は40であるから、(未定者数) の比の値は $50 - 40 = 10$ であり、(就職希望者数) の比の値が9であることより、(進学希望者数) の比の値は $40 - 9 = 31$ である⁴。

よって、条件ウより次の式が成り立つ。

$$10 : 31 = x : 248$$

(内項の積) = (外項の積) より、**解法のポイント** $31 \times x = 10 \times 248$ となり、この式を解くと、 $x = 80$ [人] である。

⁴ あくまで、比の値であり、具体的な値(人数)ではない。

問題2

ある商品を120個仕入れ、原価に対し、5割の利益を上乗せして定価とし、販売を始めた。ちょうど半数が売れた時点で、売れ残りが生じると思われたので、定価の1割引きにして販売した。販売終了時刻が近づき、それでも売れ残りそうであったので、最後は定価の半額にして販売したところ、売り切れた。全体としては、原価に対し1割5分の利益を得た。このとき、定価の1割引きで売れた商品は何個か。

国家一般職2010

- 1 5個
- 2 15個
- 3 25個
- 4 45個
- 5 55個

解説

正解 1

「損益算」の問題である。 **テーマの把握**

金額(円など)に関する数値が一切出てきていないので、商品1個あたりの原価を100円としても**一般性を失わない**⁵。 **具体化**

また、1割引きで売れた商品の個数を x [個] とする。 **目標**

「原価(100円)に対し、5割の利益を上乗せ」したので、1個あたり $100 \times 0.5 = 50$ [円] の利益を上乗せして、定価150円で売り始めたことがわかる。半数である60個が売れた時点で、定価分では合計で $50 \times 60 = 3000$ [円] だけの利益を得る。その後、定価150円の1割引きである $150 \times 0.1 = 15$ [円] 引きで販売したので、この販売価格は $150 - 15 = 135$ [円] となり、1個あたりの利益は $135 - 100 = 35$ [円] になる。これが x [個] だけ売れたので、135円で売れた商品からは合計で $35 \times x$ [円] の利益を得る。残りの $60 - x$ [個] の商品の販売価格は定価の半額である75円で売ったのだから、 $75 - 100 = -25$ [円] より、1個あたり25円の損失が発生する。したがって、75円で売れた商品からは合計で $25 \times (60 - x)$ [円] の損失が発生する。

		価格	個数	利益	利益小計
原価		100円/個	120個		
売 価	定価	150円/個	60個	50円/個	3000円
	1割引き	135円/個	x [個]	35円/個	$35 \times x$ [円]
	半額	75円/個	$60 - x$ [個]	-25円/個	$-25 \times (60 - x)$ [円]

よって、一連の販売での総利益は $3000 + 35x - 25 \times (60 - x)$ [円] である。全体で1割5分の利益が出ているので、 $3000 + 35x - 25 \times (60 - x) = 100 \times 120 \times 0.15$ が成り立つ。これを整理すれば、 $60x = 300$ となり、 $x = 5$ [個] である。

5 「一般性を失わない」とは数学などの論理解答で登場する表現であり、「条件を付加しても、解答には影響しない」という意味である。

問題3

A課の職員27人が昨年1年間に取得した有給休暇取得日数の平均は、B課の職員15人のそれよりも1.4日多く、A課とB課を合わせた平均取得日数は16.0日であった。A課の職員が昨年1年間に取得した有給休暇の平均取得日数はどれか。

警視庁 I 類2008

-
- 1 16.2日
 - 2 16.3日
 - 3 16.4日
 - 4 16.5日
 - 5 16.6日

解説

正解 4

「平均」の問題である。 **テーマの把握**

[解法1] 合計に着目して、方程式で解く

求めたいA課の有給休暇平均取得日数を x [日/人]とおくと、B課のそれは $x - 1.4$ [日/人]と表せる。 **目標**

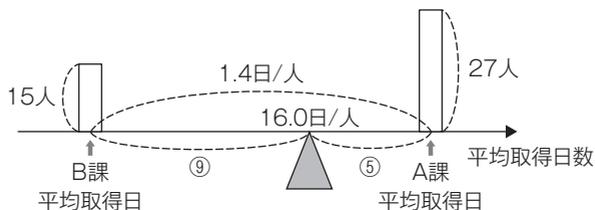
A課とB課を合わせた全体の人数は $27 + 15 = 42$ [人]である。これをもとに**表を書いて**考えれば、下表のようになる。 **表**

	A課	B課	全体(A+B)
平均取得日数[日/人]	x	$x - 1.4$	16.0
人数[人]	27	15	42
合計[日]	$x \times 27$	$(x - 1.4) \times 15$	$16.0 \times 42 = 672$

合計に着目すれば、 $27x + 15(x - 1.4) = 672$ となり、これを解けば、 $x = 16.5$ [日/人]となる。

[解法2] 天秤法で解く

A課とB課の人数の比は $27 : 15 = 9 : 5$ である。これをもとに**天秤図を描くと**、下図のようになる。 **作図**



A課とB課の平均取得日数の差である1.4日/人を(⑨ + ⑤) = 14等分すれば、一等分あたり、 $1.4 \div 14 = 0.1$ [日/人]となるので、⑤に対応する数値は $0.1 \times 5 = 0.5$ [日/人]となる。

ゆえに、A課の平均取得日数は $16.0 + 0.5 = 16.5$ [日/人]となる。

問題4

甲、乙2種類の食塩水がある。甲3、乙1の割合で混ぜ合わせると濃度5%、甲1、乙3の割合で混ぜ合わせると濃度7%の食塩水が得られる。このとき、甲の食塩水の濃度に最も近いものは、次のうちどれか。

裁判所一般職2003

-
- 1 2.6%
 - 2 3.6%
 - 3 4.6%
 - 4 5.6%
 - 5 6.6%

解説

正解 2

「濃度と混合」の問題である。 **テーマの把握**

甲の食塩水の濃度を x [%]、乙の食塩水の濃度を y [%] とする。 **目標**

[解法1] 食塩の重さに着目して解く

甲3、乙1の割合で混ぜ合わせるとき、実際の重さの数値が書かれていないので、甲を300 [g]、乙を100 [g] と仮定しても、**一般性を失わない**。このとき、**表を書いて**考えれば、以下のようなになる。 **表**

	甲	乙	全体
濃度 [%]	x [%]	y [%]	5 %
食塩水 [g]	300g	100g	$300 + 100 = 400$ [g]
食塩 [g]	$300 \times \frac{x}{100} = 3x$ [g]	$100 \times \frac{y}{100} = y$ [g]	$400 \times 0.05 = 20$ [g]

食塩の**合計**に着目すれば、 $3x + y = 20$ [g] …①が成り立つ。

同様に、甲1、乙3の割合で混ぜ合わせるとき、甲を100 [g]、乙を300 [g] とすれば、以下のようなになる。

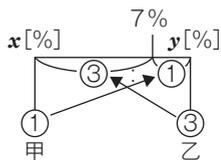
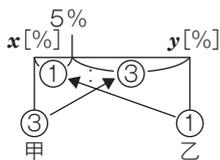
	甲	乙	全体
濃度 [%]	x [%]	y [%]	7 %
食塩水 [g]	100g	300g	$100 + 300 = 400$ [g]
食塩 [g]	$100 \times \frac{x}{100} = x$ [g]	$300 \times \frac{y}{100} = 3y$ [g]	$400 \times 0.07 = 28$ [g]

食塩の**合計**に着目すれば、 $x + 3y = 28$ [g] …②が成り立つ。①、②を連立すれば、 $x = 4$ [%]、 $y = 8$ [%] を得る。

[解法2] 天秤法で解く

甲3、乙1の割合で混ぜ合わせると濃度5%、甲1、乙3の割合で混ぜ合わせると濃度7%の食塩水ができるので、食塩水の濃度は $x < y$ である。天秤図を描けば、**作図** (混合による甲の濃度変化) : (混合による乙の濃度変化) = (乙の重さ) : (甲の重さ) であるので、 $(5-x) : (y-5) = 1 : 3$ 、 $(7-x) : (y-7) = 3 : 1$ の2つの比例式が成り立つ。(外項の積) = (内項の積) より、 $3(5-x) = y-5$ と $7-x = 3(y-7)$ となり、この連立方程式を解けば、 $x = 4$ [%]、 $y = 8$ [%]を得る。

ゆえに、甲の食塩水の濃度 $x = 4$ [%] に最も近いものは②の3.6%である。



4

速 さ

「速さ」は文章題の一分野であり、公務員試験でも頻出テーマです。そこで、学習を容易にするために、「旅人算（出会い算と追いかかけ算）」、「周回算」、「流水算」、「通過算」、「仕事算」、「ニュートン算」など、定番のテーマに分類しています。解法は、今までに学んだ手法を使っていきますが、単位変換などの新しい手法も登場します。

1 速さの3要素と3公式

1 速さの問題

速さの問題では、ある「速さ」で、いくらかの「時間」をかけて、ある「距離」を移動する人や車などが登場する。この「速さ」、「時間」、「距離」の3要素に関する式を使いながら、未知のものを求める問題が出題される。以下では、速さの問題で登場する3要素とその関係について説明する。

① 速 さ

「速さ」とは、**単位時間あたりの変化量**を表したものである¹。

単位時間とは、1秒、1分、1時間、1日、…など、「1」の付く時間のことである。

- ・ 1秒あたりの変化量を「秒速」という。
- ・ 1分あたりの変化量を「分速」という。
- ・ 1時間あたりの変化量を「時速」という。

特に、移動における速さは、**単位時間あたりの移動距離**で定義される。

以下では、特に断りがない限り、移動における速さを考える。

② 速さの3要素

移動における速さを考えるとき、**速さ・時間・距離(道のり)**を「**速さの3要素**」という。

¹ 例えば、ウイルスが増殖する速さやうわさが広がる速さなど、速さには様々なものがある。公務員試験では、仕事の速さなども登場する（後述）。

例1

一定の速さで歩く人が、200mを5分で移動したとき、この人の歩く速さは1分あたり $200 \div 5 = 40$ [m]である。

また、分速40mで歩く人が200mを移動するには、 $200 \div 40 = 5$ [分]かかる。

分速40mで歩く人が5分歩くと、 $40 \times 5 = 200$ [m]移動する。

この例からもわかるように、速さの3要素の間には互いにつながり(関係式)がある。これが、次の「速さの3公式」である。

③ 速さの3公式

次の3つの式を「速さの3公式」という。

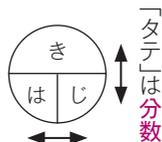
速さの3公式

$$(\text{速さ}) = (\text{距離}) \div (\text{時間}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{時間})}$$

$$(\text{時間}) = (\text{距離}) \div (\text{速さ}) = \frac{(\text{距離})}{(\text{速さ})}$$

$$(\text{距離}) = (\text{速さ}) \times (\text{時間})$$

速さの3公式の覚え方



「は」= (速さ)
「じ」= (時間)
「き」= (距離)

「ヨコ」は掛け算

※求めたいものを隠すと、式が現れる。

※ 1つの式からスタートして変形すれば、残りの2つの式は簡単に導出できる。

2 単位換算

速さの問題を解く際に、単位(基準)を揃える必要が生じる。このとき、次のように単位換算を行う。

① 時間について

$$1 \text{ 時間} = 60 \text{ 分}, \frac{1}{60} \text{ 時間} = 1 \text{ 分}$$

$$1 \text{ 分} = 60 \text{ 秒}, \frac{1}{60} \text{ 分} = 1 \text{ 秒}$$

より、図1のように単位換算できる。

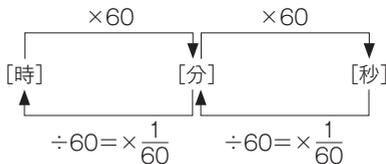


図1

例2

2時間15分の単位を[分]に揃えると、2時間 = 1時間 \times 2 = 60分 \times 2 = 120分より、 $120 + 15 = 135$ [分]である。これを図1のように単位換算すれば、 $2 \times 60 + 15 = 135$ [分]となる。また、2時間15分の単位を[時間]に揃えると、15分 = 1分 \times 15 = $\frac{1}{60}$ 時間 \times 15 = $\frac{15}{60}$ 時間 = $\frac{1}{4}$ 時間より、2時間15分 = $(2 + \frac{1}{4})$ 時間 = $\frac{9}{4}$ 時間である。これを図1のように単位換算すれば、 $2 + \frac{15}{60} = \frac{9}{4}$ [時間]となる。

例3

12分48秒の単位を[秒]に揃えると、12分 = 1分 \times 12 = 60秒 \times 12 = 720秒より、 $720 + 48 = 768$ [秒]である。これを図1のように単位換算すれば、 $12 \times 60 + 48 = 768$ [秒]となる。また、12分48秒の単位を[分]に揃えると、48秒 = 1秒 \times 48 = $\frac{1}{60}$ 分 \times 48 = $\frac{48}{60}$ 分 = $\frac{4}{5}$ 分より、12分48秒 = $(12 + \frac{4}{5})$ 分 = $\frac{64}{5}$ 分である。これを図1のように単位換算すれば、 $12 + \frac{48}{60} = \frac{64}{5}$ [分]となる。

② 距離について

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}, \frac{1}{1000} \text{ km} = 1 \text{ m}$$

より、図2のように単位換算できる。

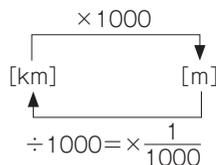


図2

例4

1250mの単位を[km]に変換すると、 $1250 \text{ m} = 1 \text{ m} \times 1250 = \frac{1}{1000} \text{ km} \times 1250 = \frac{1250}{1000} \text{ km} = 1.25 \text{ km}$ である。これを図2のように単位換算すれば、 $\frac{1250}{1000} = 1.25$ [km]となる。逆に、1.25kmの単位を[m]に変換すると、 $1.25 \text{ km} = 1 \text{ km} \times 1.25 = 1000 \text{ m} \times 1.25 = 1250 \text{ m}$ である。これを図2のように単位換算すれば、 $1.25 \times 1000 = 1250$ [m]となる。

③ 速さについて

$$\text{時速 } 1 \text{ m} = \text{分速 } 60 \text{ m} = \text{時速 } 3600 \text{ m} = \text{時速 } 3.6 \text{ km}$$

より、図3のように単位換算できる。

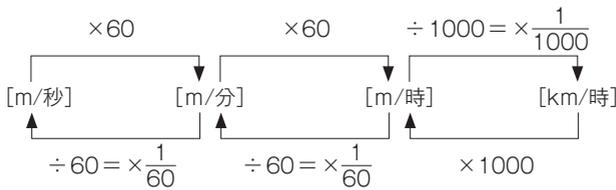


図3

例5

時速72kmの単位を秒速[m/秒]に変換すると、 $72\text{km}/\text{時} = 72000\text{m}/60\text{分} = 1200\text{m}/\text{分} = 1200\text{m}/60\text{秒} = 20\text{m}/\text{秒}$ となるので、秒速20mである。これを図3のように単位換算すれば、 $72 \times 1000 \div 60 \div 60 = 20$ [m/秒]となる。逆に秒速20mの単位を時速[km/時]に変換すると、20m/秒は「1秒あたり20m進む速さ」であるから、「60秒で $20 \times 60\text{m}$ 進む速さ」 $= 1200\text{m}/60\text{秒} = 1200\text{m}/\text{分} = 1.2\text{km}/\text{分}$ であり、1.2km/分は「1分あたり1.2km進む速さ」であるから、「60分で $1.2 \times 60\text{km}$ 進む速さ」 $= 72\text{km}/60\text{分} = 72\text{km}/\text{時}$ となる²。よって、時速72kmである。これを図3のように単位換算すれば、 $20 \times 60 \times 60 \div 1000 = 72$ [km/時]となる。

3} 速さの問題の基本的な考え方

① 情報の整理と目標の設定

問題文を読む際は、登場人物やものについて、速さの3要素のうち何が与えられていて、何を求めるのかを考えなければならない。

はじめのうちは、次のように速さの3要素を表に整理すると、何が与えられていて、何を求めればよいか分かりやすくなる。

人、もの	A	B
速さ(は)		
時間(じ)		
距離(ぎ)		

上のような表を書き、問題文から与えられている3要素を書き込んでいく。具体的に書き込んでいく様子は、例題1-7の「正解へのプロセス」で紹介する。

² 72km/時=72km/hと表すこともある。hは時間 (hour) の頭文字である。

② 状況把握

具体的にイメージをする際は、道のりの図(線分図の一種)に速さの3要素を書き込んで状況把握するとわかりやすい。



③ 立式

大きく分けると次の2つの方針がある。

(ア) 速さの3公式を用いて解く

1つ目は速さの3公式を用いて、方程式で解くというものである。

速さの3公式に当てはめて解くだけに思えるが、未知数に対応する文字を複数設定する必要も生じ、計算が煩雑になることもある。

(イ) 比を用いて解く

登場人物やものの速さの3要素の中に、一致するものが1要素でもあれば、残りの2要素間に比例式を立てて解くことができる。

4 比を用いた立式

比を用いて解く場合は、次のようにまとめられる。

① 同じ速さで移動するとき

同じ速さで移動するとき、距離と時間は正比(比例)の関係になる。

例6

分速100mでランニングするとき、30分走る場合と50分走る場合の走った距離の比は $3000 : 5000 = 30 : 50$ であり、距離と時間は正比の関係になる。

	30分走るとき	50分走るとき
速さ(は)	100m/分 ←同じ→ 100m/分	
時間(じ)	30分	50分
距離(き)	3000m	5000m

② 同じ時間で移動するとき

同じ時間で移動するとき、速さと距離は正比(比例)の関係になる。

例7

毎日20分歩いている。普段、分速40mで歩くところを、今日はいつもの2倍のスピードで歩くと、普段と今日の距離の比は $800 : 1600 = 40 : 80$ であり、速さと距離は正比の関係になる。

	普段	今日
速さ(は)	40m/分	80m/分
時間(じ)	20分 ←同じ→ 20分	
距離(き)	800m	1600m

③ 同じ距離を移動するとき

同じ距離を移動するとき、**速さと時間は逆比**(反比例)の関係になる。

例8

12km離れた町を同じ道を通って往復するとき、行きを時速6km、帰りを時速4kmで歩けば、行きと帰りの所要時間はそれぞれ $\frac{12}{6} = 2$ [時間]、 $\frac{12}{4} = 3$ [時間] かかり、所要時間の比は2 : 3である。したがって、時間の比は速さの比である6 : 4 = 3 : 2と**逆比**の関係になる。

	行き	帰り
速さ(は)	6km/時	4km/時
時間(じ)	2時間	3時間
距離(き)	12km ←同じ→ 12km	

例題 1-7

甲乙間を往復するのに、往路は時速12kmで行き、復路は時速16kmで戻ったところ、かかった時間は3時間30分だった。甲から乙までの距離として、正しいのはどれか。

- ① 18km
- ② 24km
- ③ 30km
- ④ 36km
- ⑤ 42km

正解へのプロセス

① 問題文の読み方と目標の設定

速さの問題では、速さの3要素のうち何が与えられていて、何を求めるのか確認する。

そこで、問題文の中で登場した速さの3要素とその値にそれぞれアンダーラインと「囲い」を付けると次のようになる。

「甲乙間を往復するのに、往路は時速12kmで行き、復路は時速16kmで戻ったところ、かかった時間は3時間30分だった。甲から乙までの距離として、正しいのはどれか。」

そこで、求めたい甲乙間の距離を x [km]とおく。

② 状況把握

これらを、道のりの図に描いて作図し、速さの3要素を表に整理する。 **作図** **表**
このとき、あらかじめ単位変換をして、単位を揃えておくとよい。 **基準**



	往路	復路	合計
速さ(は)	12[km/時]	16[km/時]	/
時間(じ)			
距離(き)	x [km]	x [km]	$2x$ [km]

一致

表を書くと、速さの3要素の中で距離が一致していることがわかる。

③ 速さの問題の立式と2つの解法

速さの3公式を用いて方程式を立てれば、公務員試験で出題される速さの問題は原則的にどんな問題でも解くことができる。しかし、速さの3要素の中に一致する要素が1要素でもあれば、残りの2要素間に比例式を立てて解くこともできる。

解法のポイント

比例式を立てる場合、速さの3公式に当てはめて解くのではないので、方程式の解法に比べて立式は難しくはなるが、設定する文字の数を減らすことができ、計算が簡単になる。

そこで、本問では2つの解法を紹介する。どちらかの解法で解ければよいので、自分に合った解法を見つけてもらいたい。

[解法1] 速さの3公式を用いて解く

速さの3公式を用いて、方程式で解くときは、速さの3要素を文字で表して具体化する。 **公式** **具体化**

上表より、時間については、往路が $\frac{x}{12}$ [時間]かかり、復路が $\frac{x}{16}$ [時間]かかる。未知数が x の1つだけであるから、方程式は1つだけ立式すればよい。

[解法2] 比を用いて解く

上表より、距離が往路と復路で一致しているので、速さと時間が逆比の関係になることを利用する。往路と復路について、速さの比は $12:16=3:4$ なので、時間の比は $4:3$ になる。 **解法のポイント**

解説

[解法1] 速さの3公式を用いて解く

甲から乙までの距離を x [km]とすれば、**目標** 往路の所要時間は $\frac{x}{12}$ [時間]かかり、復路の所要時間は $\frac{x}{16}$ [時間] かかる。

下表のように速さの3要素を表に整理すると、**表** 往復の所要時間である3時間30分は3時間30分 $=3+\frac{30}{60}$ 時間 $=3+\frac{1}{2}$ 時間 $=\frac{7}{2}$ 時間であるから、合計所要時間に着目すれば、次の方程式が成り立つ。

$$\frac{x}{12} + \frac{x}{16} = \frac{7}{2} \dots \textcircled{1}$$

	往路	復路	合計
速さ(は)	12	16	
時間(じ)	$\frac{x}{12}$	$\frac{x}{16}$	$\frac{7}{2}$
距離(き)	x	x	$2x$

①の両辺に12と16の最小公倍数である48を掛けて整理すれば、 $4x+3x=7 \times 24$ となり、 $x=24$ [km]を得る。

[解法2] 比を用いて解く

上表を見れば、甲乙間の往路、復路はともに距離が等しいので、**往路と復路の速さの比と、往路と復路の時間の比には逆比の関係が成り立つ。** **解法のポイント**

速さは往路の時速12km、復路の時速16kmであるので、(往路の速さ) : (復路の速さ) = 12 : 16 = 3 : 4である。所要時間の比は速さの逆比であるので、(往路の所要時間) : (復路の所要時間) = 4 : 3であり、往復の所要時間である3時間30分 $=\frac{7}{2}$ 時間を、往路と復路で4 : 3に比例配分すればよい。

$\frac{7}{2}$ 時間を(4 + 3 =) 7等分すれば、1等分あたり $\frac{7}{2} \div 7 = \frac{1}{2}$ [時間] である。

したがって、往路の所要時間は $\frac{1}{2} \times 4 = 2$ [時間]、復路の所要時間は $\frac{1}{2} \times 3 =$

$\frac{3}{2}$ [時間] となる。

あるいは次のように比例配分してもよい。往路の所要時間 = $4k$ [時間]、復路の所要時間 = $3k$ [時間]とすれば、 $4k + 3k = \frac{7}{2}$ より、 $k = \frac{1}{2}$ である。よって、往路の所要時間 = $4 \times \frac{1}{2} = 2$ [時間]、復路の所要時間 = $3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ [時間]である。

したがって、甲から乙までの距離(往路の移動距離)は(速さ) \times (時間) = $12 \times 2 = 24$ [km]である。

正解 2

2 旅人算

1 旅人算

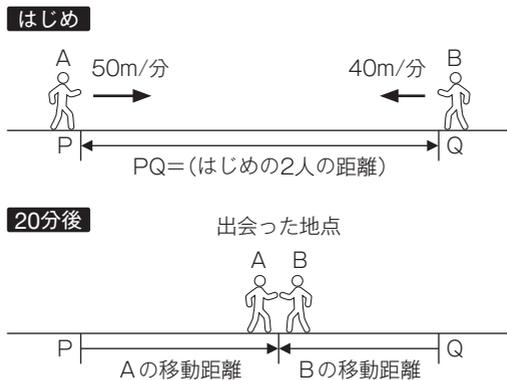
何人かの人やいくつかのもの(例えば何台かの車など)が、互いに逆向きに移動して、出会う(すれ違う)場合の速さの問題を「**出会い算**」、互いに同じ向きに移動して、早い方が遅い方を追い抜く場合の速さの問題を「**追いかかけ算**」という。出会い算と追いかかけ算をまとめて「**旅人算**」という。

出会い算と追いかかけ算の例を見てもらいたい。

① 出会い算

例9

2地点P、Qを結ぶ一本の道路があり、AがPからQへ向かって、BがQからPへ向かって、この道路をそれぞれ同時に歩き始めた(下図)。Aは分速50mで、Bは分速40mで歩いたところ、2人が出会うまで20分かかった。PQ間の距離はいくらか。



図を見ると一目瞭然だが、 $PQ=(Aの移動距離)+(Bの移動距離)$ が成り立つ。

Aの移動距離は $50 \times 20 = 1000$ [m]、Bの移動距離は $40 \times 20 = 800$ [m]であるから、 $PQ = 1000 + 800 = 1800$ [m]である。

次のように考えてもよい。(はじめの2人の距離)=PQであり、1分経つごとに、2人の距離は $50 + 40 = 90$ [m]縮まる。20分間で $90 \times 20 = 1800$ [m]縮まり、2人の距離は0mになってAとBは出会うのだから、

$$(はじめの2人の距離) - (縮まった距離) = (おわりの2人の距離)$$

より、(はじめの2人の距離) $- 1800$ [m] = 0 [m] である。よって、 $PQ =$ (はじめの2人の距離) = 1800 [m] である。

② 追いかかけ算

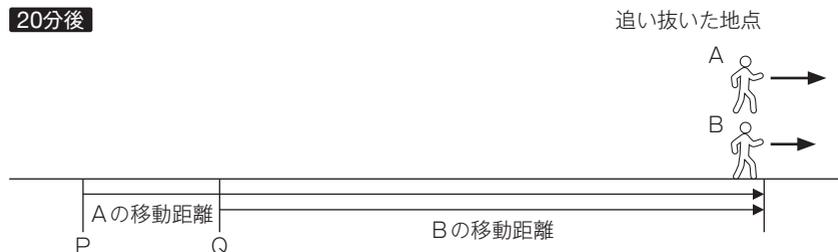
例10

一本の道路があり、この道路をAは分速50mで、Bは分速40mで同じ方向に歩いている。Aが地点Pを通過したとき、Bは地点Qを通過し、このときからちょうど20分後にAはBを追い抜いた(下図)。PQ間の距離はいくらか。

はじめ



20分後



これも、図を見ると一目瞭然だが、 $PQ = (Aの移動距離) - (Bの移動距離)$ が成り立つ。

Aの移動距離は $50 \times 20 = 1000$ [m]、Bの移動距離は $40 \times 20 = 800$ [m] であるから、 $PQ = 1000 - 800 = 200$ [m] である。

次のように考えてもよい。(はじめの2人の距離) = PQ であり、1分経つごとに、2人の距離は $50 - 40 = 10$ [m] 縮まる。20分間で $10 \times 20 = 200$ [m] 縮まり、2人の距離は 0 m になって、AがBを追い抜くのだから、

$$(\text{はじめの2人の距離}) - (\text{縮まった距離}) = (\text{おわりの2人の距離})$$

より、(はじめの2人の距離) $- 200$ [m] = 0 [m] である。ここで、(おわりの2人の距離) = 0 [m] とした。よって、 $PQ =$ (はじめの2人の距離) = 200 [m] である。

以上の例を踏まえて、旅人算での解法のポイントをまとめておく。

2 旅人算の状況把握

道のりの図に速さの3要素を書き込む。

旅人算(出会い算・追いかかけ算)では、道のりの図を描けば、状況が把握しやすくなるのがわかるだろう。

※ しかし、問題の登場人物が3人以上の場合、道のりの図が作図しづらく、状況も把握しづらい。また、2人が区間を往復する問題などの複雑な問題や、与えられている条件が所要時間のみのような抽象的な問題では、ダイアグラム(後述)というグラフを用いるとわかりやすい。

3 旅人算の立式と公式

旅人算の基本公式は次式である。

$$(\text{はじめの2人の距離}) - (\text{縮まった距離}) = (\text{おわりの2人の距離})$$

問題を解くときは、この式をベースにして、少し手を加えた次の①、②の2つの立式を使えるといい。どちらの立式の仕方も習得してもらいたいが、いずれも登場人物の移動距離に着目して立式するとよい。

① 出会う瞬間、追い抜く瞬間に着目したとき

登場人物2人が出会う瞬間や追い抜く瞬間は、互いの距離が0になる。したがって、(おわりの2人の距離) = 0 とすれば、このとき、旅人算(出会い算・追いかかけ算)の公式は次のようになる。

旅人算の公式 I

① 【出会い算の公式 I】

2人が同じ道を逆向きに進み、しばらくして出会うとき、

$$(\text{はじめの2人の距離}) = (\text{出会う瞬間までの2人の移動距離の和})$$

② 【追いかかけ算の公式 I】

2人が同じ道を同じ向きに進み、しばらくして早い方が遅い方を追い抜くとき、

$$(\text{はじめの2人の距離}) = (\text{追い抜く瞬間までの2人の移動距離の差})$$

※ これは、出会う瞬間や追い抜く瞬間までしか使えない公式だが、途中で速さ
が変化しても成り立つ式である。

② 2人の速さに変化がないとき

はじめからおわりまで2人の速さに変化がない(速さが一定の)とき、単位時間だけ経過するごとに2人の距離は、出会い算では「速さの**和**」だけ、追いかけて算では「速さの**差**」だけ縮まる³。したがって、次式が成立する。

旅人算の公式Ⅱ

2人の速さに変化がない(速さが一定の)とき、

① 【出会い算の公式Ⅱ】

$$(\text{はじめの2人の距離}) - (\text{速さの和}) \times (\text{時間}) = (\text{おわりの2人の距離})$$

② 【追いかけて算の公式Ⅱ】

$$(\text{はじめの2人の距離}) - (\text{速さの差}) \times (\text{時間}) = (\text{おわりの2人の距離})$$

※ これは、2人の速さが変化しない場合にしか使えない公式だが、「出会う・
出会わない」や「追い抜く・追い抜かない」に関わらず成り立つ式である。なお、
「出会う・追い抜く」ときは、(おわりの2人の距離) = 0とすればよい。

4 旅人算と比の関係

同時に出発して、その後2人が一定の速さで進むとき、出会ったり(すれ違った
り)追い抜いたりするまでの2人の移動時間が同じになるので、2人の速さと距離
には**正比(比例)の関係**が成り立つ。

実際、**例1**および**例2**の場合も、(Aの速さ) : (Bの速さ) = 50 : 40 = 5 : 4、(A
の移動距離) : (Bの移動距離) = 1000 : 800 = 5 : 4であり、確かに速さの比と移
動距離の比が一致する。

³ この「速さの和」や「速さの差」は2人の「相対的な速さ」を表している。旅人算の基本公式である(はじめの2人の距離) - (縮まった距離) = (おわりの2人の距離)は、2人の「相対的な距離」に関する式であり、旅人算は「速さの相対問題」であると考えることができる。

例題 1-8

AはP町を15時ちょうどに出発し、Q町に16時40分に到着した。また、BはQ町を15時40分に出発し、P町に16時30分に到着した。2人が同じ道を一定の速さで進んだとすると、2人が出会った時刻として、正しいのはどれか。

- ① 16時00分
- ② 16時05分
- ③ 16時10分
- ④ 16時15分
- ⑤ 16時20分

正解へのプロセス

① 問題文の読み方

まず、AとBの2人の進行方向が逆向きであるから「出会い算」の問題である。

テーマの把握

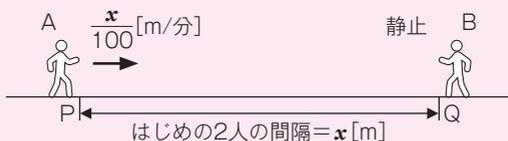
本問は時刻の情報しか与えられておらず、速さの3要素にわからないものが多い。距離や速さなどの数値が具体的に与えられていないので、距離の単位(基準)を[m]としても、[km]としても一般性は失わない。そこで、速さの3要素のうち未知数の1つであるPQ間の距離を x [m]とする。具体化 基準

AはPQ間を $16:40 - 15:00 = 1$ 時間40分=100分間で、BはQP間を $16:30 - 15:40 = 50$ 分間で進むので、A、Bの分速はそれぞれ $\frac{x}{100}$ [m/分]、 $\frac{x}{50}$ [m/分]である。これらを表に整理すると次表のようになる(表1)。表

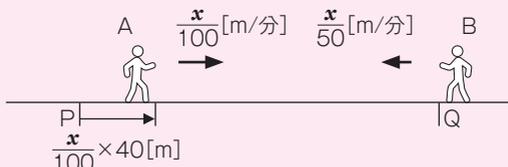
表1	A	B
速さ(は)	$\frac{x}{100}$ [m/分]	$\frac{x}{50}$ [m/分]
時間(じ)	100 [分]	50 [分]
距離(き)	x [m]	x [m]

次に、時系列に道のりの図を描きながら状況を把握していく。作図

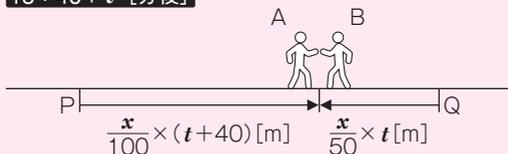
15:00



15:40



15:40 + t [分後]



② 目標の設定

本問の目標は2人が出会った時刻である。そこで、Bが出発する15:40から t [分後]に2人が出会うとする。 **目標**

③ 本問の注意点

特筆すべき点は、15:00から15:40の間、BはQから動いていない。つまり、この間のBの速さは0 m/分である。したがって、Bの速さは15:40を境に変化しており、一定とはいえないことに注意したい。

出会うまでの行程に関して、A、Bの速さの3要素を表に整理する(表2)。 **表**

表2	A	B
速さ(は)	$\frac{x}{100}$ [m/分]	$\frac{x}{50}$ [m/分]
時間(じ)	$t+40$ [分]	t [分]
距離(き)	$\frac{x}{100} \times (t+40)$ [m]	$\frac{x}{50} \times t$ [m]

表1ではAとBの移動距離が一致していたが、表2では速さの3要素のうち一致する要素がない。速さの3要素のうち一致する要素がなければ、比で解くことができず、方程式で解くしかない。

そこで、**出会い算の公式 I** を用いて立式して、未知数 t を求めていく。

解法のポイント

※ なお、15:40以降は2人の移動時間が同じになる。

解説

AはPQ間を100分間で、BはQP間を50分間で進むので、PQ間の距離を x [m] とすると、A、Bの分速はそれぞれ $\frac{x}{100}$ [m/分]、 $\frac{x}{50}$ [m/分] である。

Bが出発する15:40から t [分後] に2人が出会うとすると、**目標** Aは15:00から15:40まで1人で40分間進むので、**出会い算の公式 I** で、(はじめの2人の距離) = PQ、(出会う瞬間までの2人の移動距離の和) = (Aの進んだ距離) + (Bの進んだ距離)

として、 $PQ = (Aの進んだ距離) + (Bの進んだ距離)$ より、**公式** $\frac{x}{100} \times (t + 40) + \frac{x}{50} \times t = x$ である⁴。

両辺を x で割ってから100を掛けると、 $(t+40) + 2 \times t = 100$ となり、整理すれば $3t = 60$ となる。これを解けば $t = 20$ [分後] を得る。よって、出会った時刻は、 $15:40 + (20分) = 16:00$ である。

正解 1

⁴ 未知数が x と t の2つに対し、式が1つなので、この方程式は不定方程式である。実際 x は求められず不定であるが、目標である t は求められる。

3 周回算

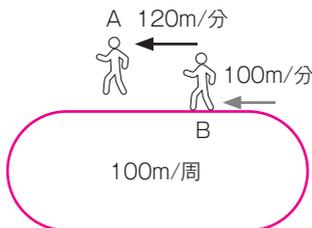
1 周回算

2人(2つ)以上の人(もの)が周回する旅人算を「**周回算**」という。2人(2つ)の進行方向が逆向き(互いに逆回り)のときは「**出会い算**」であり、進行方向が同じ向き(同じ回り)のときは「**追いかけ算**」である。

周回算は旅人算の一種であるから、旅人算の考え方がそのまま使える。つまり、登場人物の移動距離の和・差に着目して立式すればよい。また、周回算では「 \sim 分ごとに」という「**周期**」が登場することが多い。

例11

下図のような1周100mのグラウンドのトラックを、Aは分速120mの速さで、Bは分速100mの速さで同一方向に周回している。AはBを何分ごとに追い抜くだろうか。



AがBと並んでから、1分後にはAが120m進み、同一方向にBが100m進むので、AはBから見て20m先行する。さらに1分経てばAはBから $20 \times 2 = 40$ [m]先行する。AがBと並んでから5分後、AはBから $20 \times 5 = 100$ [m]先行するが、100m進むと1周するので、位置として見れば、AはBと並ぶ。つまり、Aは周回遅れのBを追い抜く。よって、AはBを5分ごとに追い抜く。

このことを、改めて次のように計算して考えてみる。

1分ごとに2人の距離は速さの差である $120 - 100 = 20$ [m]だけ開いていく。1周分である100mだけ開いたときが「**追い抜く**」瞬間であるから、 $100 \div 20 = 5$ [分]ごとに追い抜く。

よって、追い抜く周期は(追い抜く周期) = (周の長さ) \div (速さの差)として計算できる。言い換えれば、(速さの差) \times (追い抜く周期) = (周の長さ)が成り立つことがわかる。

なお、この追い抜く周期である5分間でAは $120 \times 5 = 600$ [m]進むので6周しており、Bは $100 \times 5 = 500$ [m]進むので5周している。したがって、2人の移動距離にちょうど1周分の差($600 - 500 = 100$ [m])が生じていることがわかる。

2 周回算の公式

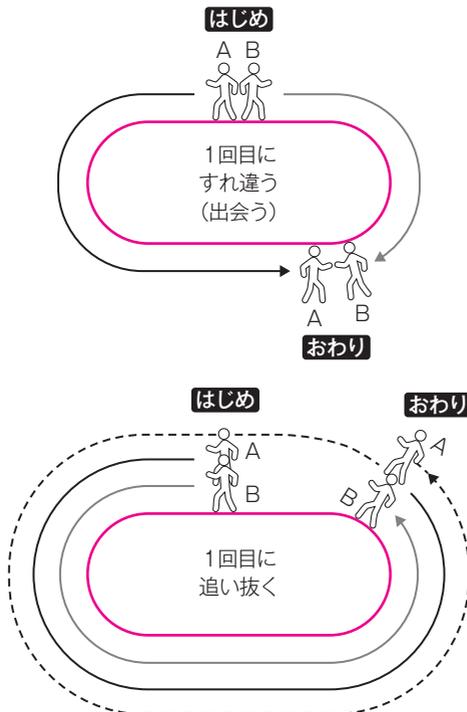
上の例では追いかけ算について取り上げたが、出会い算については、左下のよう
に図を描いて、距離の和に着目してもわかり易い。

下図のように、AとBの2人が逆向きに同一地点からスタートして、1回目に出
会うときは、2人の移動距離の和が1周分になっていることがわかる。したがって、

$$(2 \text{ 人の移動距離の和}) = (2 \text{ 人の速さの和}) \times (\text{すれ違いの周期}) = (\text{周の長さ})$$

であることがわかる。

例11の最後にも示したが、追いかけ算についても右下図のように図を描いて、距
離の差に着目してみれば、同一地点から、2人が同じ向きにスタートして1回目に
追い抜くときは、2人の移動距離の差が1周分(図の破線分)になっていることが
わかる。



以上より、周回算では次式が成り立つ。

周回算の公式(2人が一定の速さで進む場合)

①【周回算(出会い算)の公式】

2人が周回路を**逆向き**に進み、しばらくしてすれ違うとき、
(2人の速さの**和**)×(すれ違いの周期)=(周の長さ)

②【周回算(追いかけ算)の公式】

2人が周回路を**同じ向き**に進み、しばらくして早い方が遅い方を追い抜くとき、
(2人の速さの**差**)×(追い抜きの周期)=(周の長さ)

例題 1-9

1周400mの池の周りを、Aは5分、Bは3分で1周する。今、AとBがP地点から反対方向に同時に出発したとき、3回目に2人が出会う地点に関する記述のうち、正しいのはどれか。

- 1 P地点
- 2 P地点よりAの進行方向50mの地点
- 3 P地点よりAの進行方向100mの地点
- 4 P地点よりAの進行方向150mの地点
- 5 P地点よりAの進行方向200mの地点

正解へのプロセス

① 問題文の読み方

「1周400mの池の周りを…AとBが…反対方向に同時に出発した」とあるので、本問は「**周回算(出会い算)**」の問題である。 **テーマの把握**

速さの問題では、「速さの3公式を用いて方程式で解く」か「比を用いて解く」の2つの解法があるが、周回算では、周回算の公式を用いる解法が速さの3公式を用いて方程式で解く解法に相当する。 **解法のポイント**

2つ目の解法として、比を用いて解けないかを考える。つまり、速さの3要素のうち一致するものがあるかを探すのである。旅人算や周回算では、同時に出発する場合、2人の出会う・追いつくまでの時間が同じであるから速さと移動距離に正比(比例)の関係が成り立つ。

本問では、「同時に出発」しているので、比で解くこともできる。

本問の目標は「3回目に2人が出会う地点」とあるが、まずは「1回目に2人が出会う地点」を基準に考えるとよい。周期が登場する周回算では1周期分の動きを考えるとわかりやすい。 **目標** **基準**

② 周回算の公式の使い方

周回算(出会い算)の公式(2人の速さの和)×(すれ違いの周期)=(周の長さ)より、公式に代入する諸量のうち、何がわかっていて、何を求めるべきかを考えたい。 **公式**

(周の長さ)=400 [m]であるので、「AとBの2人の速さ」や「すれ違いの周期」

が求められないかを考えてみる。Aは5分で400m進むことから、速さが $\frac{400}{5}=80$

[m/分]であることがわかり、Bは3分で400m進むことから、速さが $\frac{400}{3}$ [m/分]

であることがわかる。そこで、「すれ違いの周期」を x [分]とすると、**周回算(出会い算)の公式**に代入すれば、**(2人の速さの和) × (すれ違いの周期) = (周の長さ)**

より、 $(80 + \frac{400}{3})x = 400$ と立式できる。これを解けば、 $x = \frac{15}{8}$ [分]を得る。

「すれ違い(出会い)の周期」=「1回目に出会うまでの時間」が $\frac{15}{8}$ [分]であること

から、3回目に出会うまでにかかる時間はその3倍である $\frac{15}{8} \times 3 = \frac{45}{8}$ [分]である。

あとは、上で求めた諸量を用いて、どのように解答までたどり着けばよいかを考えてもらいたい。

③ 周回算と比

速さの3要素の中に一致する要素が1要素でもあれば、残りの2要素間に比例式を立てて解くことができる。

「池の周りを、Aは5分で、Bは3分で1周する」ということは、AとBが同じ距離(1周)を進むときの所要時間がそれぞれ5分と3分であるということである。**移動距離が等しいとき、速さと時間は逆比の関係になる**ことに注目する。これより、AとBの速さの比は所要時間の逆比である3:5である。

同時に出発したので、AとBの所要時間は等しい。したがって、**速さと距離が正比の関係になる**ことに注目すると、AとBの速さの比は3:5より、2人の移動距離の比は常に3:5である。

解説

【解法1】 周回算(出会い算)の公式で解く(速さの3公式を用いて解く)

Aは5分で400m進むことから、速さが $\frac{400}{5}=80$ [m/分]であることがわかり、

Bは3分で400m進むことから、速さが $\frac{400}{3}$ [m/分]であることがわかる。

周回算(出会い算)の公式より、2人が1回目に出会うまでの時間を x [分]とす

ると、 $(80 + \frac{400}{3})x = 400$ となる。**公式10**で割って整理すれば、 $(8 + \frac{40}{3})x = 40$

から $\frac{64}{3}x = 40$ となり、 $x = 40 \div \frac{64}{3} = 40 \times \frac{3}{64} = \frac{15}{8}$ [分]である。

1回目に出会うまでの時間が $\frac{15}{8}$ [分]であることから、3回目に出会うまでにかかる時間は $\frac{45}{8}$ [分]である。この時間でAの進んだ距離は、 $80 \times \frac{45}{8} = 450$ [m]となり、2人が出会ったのは、Aが1周して(400mまわって)からさらに50m進んだ地点である。

[解法2] 比を用いて解く

池の周りをAは5分で、Bは3分で周回するということは、AとBが同じ距離(1周)を進むときの所要時間がそれぞれ5分と3分であるということである。これより、AとBの速さの比は所要時間の逆比である3:5である。**解法のポイント**

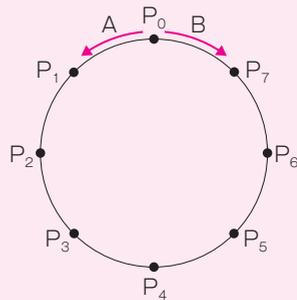
また、AとBが出会うまでの2人の所要時間は等しいので、AとBの速さの比は3:5より、2人の移動距離の比は3:5である。

そこで、この池の周りを $3+5=8$ [等分]した点 $P_0 \sim P_7$ を右図のように設定する。

作図

P_0 からA、Bが図の矢印の方向にそれぞれ進むとき、AとBの移動距離の比は3:5より、Aが3つ分反時計回りに進み、Bが5つ分時計回りに進むので、2人が出会う場所は P_3 であることがわかる。

次はこの点 P_3 がスタート地点になる。 P_3 をスタート地点にすると次に出会う場所は P_6 であり、 P_6 をスタート地点にするとその次に出会う場所は P_1 であるから、3回目に出会うのは P_1 である。したがって、 P_1 は P_0 からAの進行方向に $400 \div 8 = 50$ [m]進んだ地点である。



正解 **2**

4 流水算

1 流水算

川の流れによって、岸から見た船の移動の速さは速くなったり遅くなったりする。一般に、岸から見れば、川下りでは船の移動の速さは速くなり、川上りでは遅くなる。また、動く歩道やエスカレーター上を流れの方向に歩いて進めば、止まっている人から見た移動の速さは速くなる。

このように、動くものの上(流れの中)を進む人や船に関する速さの問題を「流水算」という。

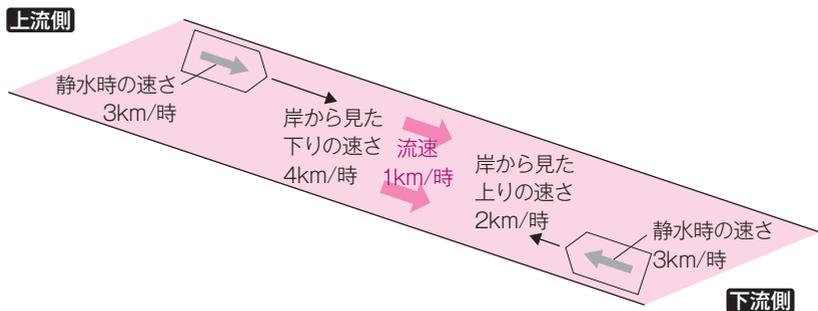
例12

一定の速さで流れる川がある。この川の流速が時速1kmであり、静水時の速さが時速3kmの船で川を上り・下りするとき、岸から見た船の速さはいくらか。

※ (静水時の速さ) = (船自身の速さ) である。

静水時の速さが時速3kmの船で川を下るときは、川の流れによる流速が加わって、流速分だけ速くなり、岸から見れば、船の移動の速さは $3+1=4$ [km/時]で進む。よって、岸から見た下りの船の速さは4 [km/時]である。

また、静水時の速さが時速3kmの船で川を上るときは、川の流れに戻されて、流速分だけ遅くなり、岸から見れば、船の移動の速さは $3-1=2$ [km/時]で進む。よって、岸から見た上りの船の速さは2 [km/時]である。



2 上り・下りする船の速さ

例12より、次式が成立する。

上り・下りする船の速さ

- 1 (岸から見た下りの速さ) = (静水時の速さ) + (流速)
- 2 (岸から見た上りの速さ) = (静水時の速さ) - (流速)

※ 流水算では、「岸から見た速さ」を基準と考える。

3 流水算と比の関係

流水算では下りと上りの移動距離が同じと設定されることが多い。このような場合は、**所要時間と速さが逆比の関係になる**。これを用いて立式することもできる。

例13

静水時の速さが35km/時である船が120km離れた2地点間を結ぶ川を上り下りする場合を考える。1日目の流速が5km/時、2日目の流速が15km/時のとき、下りと上り(2日間の様子)の表から、所要時間の比と速さの比を調べてみる。

	1日目の下り	1日目の上り	2日目の下り	2日目の上り
岸から見た速さ	$35+5=40$ [km/時]	$35-5=30$ [km/時]	$35+15=50$ [km/時]	$35-15=20$ [km/時]
時間	3時間	4時間	2時間24分	6時間
距離	120km	120km	120km	120km

所要時間の比は、3時間 : 4時間 : 2時間24分 : 6時間 = 180分 : 240分 : 144分 : 360分だが、12で割れば、15 : 20 : 12 : 30である。一方、速さの逆比は、 $\frac{1}{40} : \frac{1}{30} : \frac{1}{50} : \frac{1}{20}$ だが、600倍することで、15 : 20 : 12 : 30となり、所要時間の比と一致する。したがって、確かに、**所要時間と速さが逆比**の関係になっている。

例題 1-10

A、Bの2地点間を川が流れており、ボートでA地点からB地点まで行くのに50分、B地点からA地点まで行くのに30分かかる。静水時でのボートの速さが毎時20kmであるとき、川の流速として正しいのはどれか。ただし、川の流速は常に一定であるとする。

- ① 毎時 3 km
- ② 毎時 4 km
- ③ 毎時 5 km
- ④ 毎時 6 km
- ⑤ 毎時 7 km

正解へのプロセス

本問は流れのある川の上を進むボートに関する速さの問題であるので、「流水算」の問題である。 **テーマの把握**

流水算では、「岸から見た速さ」を基準に考える。 **解法のポイント** **基準**

川の流速を x [km/時] とおくと、(岸から見た下りの速さ) = (静水時の速さ) + (流速)、(岸から見た上りの速さ) = (静水時の速さ) - (流速) より、(岸から見た下りの速さ) = $20 + x$ [km/時]、(岸から見た上りの速さ) = $20 - x$ [km/時] である。

目標 **公式**

問題文によると、所要時間が50分、30分とあり、川下りの方が川上りに比べて短時間で到着するため、30分の方が川下り、50分の方が川上りである。

以上より、川下り、川上りの速さの3要素を表に整理すると、以下のようになる。 **表**

	川下り	川上り
速さ(は)	$20 + x$	$20 - x$
時間(じ)	30	50
距離(き)	y	y

移動距離(AB間の距離)が川下りと川上りで一致するので、解答の方針として次の2つが考えられる。

[解法1] 速さの3公式を用いて、連立方程式を立てて解く

移動距離(AB間の距離)を y [km]とおく。このとき、川下りと川上りで(距離) = (速さ) × (時間)の等式が2つ立式でき、未知数は x と y の2つあるので、連立方程式で x を求めることができる。

[解法2] 比を用いて解く

川下りと川上りで移動距離が等しく、速さの3要素のうち一致する要素が1つあるので、残りの2要素間に比例式を立てて解くことができる。

つまり、速さと時間は逆比の関係になる。 **解法のポイント**

解説

[解法1] 速さの3公式を用いて解く

流速を x [km/時]、移動距離(AB間の距離)を y [km]とすれば、**目標**岸から見たボートの速さは川下りでは $20+x$ [km/時]で、川上りでは $20-x$ [km/時]である。

30分 $=\frac{30}{60}$ 時間、50分 $=\frac{50}{60}$ 時間より、移動距離について立式すれば、川下りについて、 $y=(20+x)\times\frac{30}{60}$ であり、川上りについて、 $y=(20-x)\times\frac{50}{60}$ である。 **公式**

2式を連立し、 y を消去すれば、 $(20+x)\times\frac{30}{60}=(20-x)\times\frac{50}{60}$ となり、 $(20+x)\times 3=(20-x)\times 5$ より、これを解けば $x=5$ [km/時]である。

[解法2] 比を用いて解く

流速を x [km/時]とすれば、岸から見たボートの速さは川下りでは $20+x$ [km/時]で、川上りでは $20-x$ [km/時]である。 **目標**

川下りと川上りの移動距離が等しいため、川下り、川上りの速さの比はそれぞれの所要時間の逆比であるから、**解法のポイント** $50:30=5:3$ である。よって、 $(20+x):(20-x)=5:3$ が成り立つ。

(外項の積) = (内項の積)より、 $(20+x)\times 3=(20-x)\times 5$ が成り立つので、これを解けば $x=5$ [km/時]である。

正解 **3**

5 通過算

1 通過算

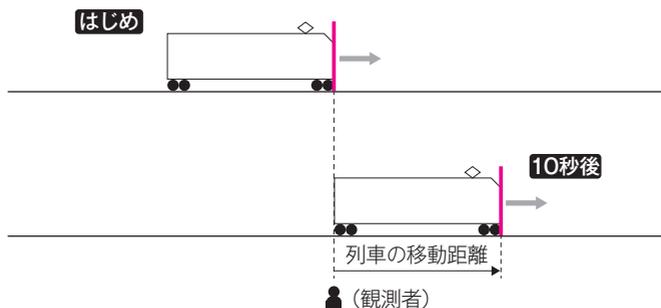
これまでの速さの問題では、移動するものの長さを考慮してこなかった。しかし、列車などの長いものが移動する場合、短時間であれば、移動する物体の長さを考慮する必要がある。

移動するものの長さを考慮に入れた速さの問題を「通過算」という。通過算では列車の他に、自動車や行列などが移動するものとして定番である。問題の設定や状況を読みながら、移動する物体の長さを考慮すべきか考えるようにしたい。

例14

時速72kmで走る列車が目の前を通過するのに、10秒かかった。この列車の長さはいくらだろうか。

「列車が目の前を通過する」とは、列車の先頭が目の前を通過し始めてから、列車の最後尾が目の前を通過し終わるまで列車が移動することである。そこで、下図のように、列車の先頭に定点(赤線)を書き込み、「目の前」の位置を破線で表せば、列車の移動距離は列車の長さ一致することがわかる。



時速72kmの単位を[m/秒]に変換する。 $72 \text{ [km/時]} = 72 \times 1000 \div 60 \div 60 = 20 \text{ [m/秒]}$ である。したがって、(列車の長さ) = (列車の移動距離) = (列車の速さ) × (時間) = $20 \times 10 = \underline{200} \text{ [m]}$ である。

一般に、列車の移動距離を考えるときは、次の図のように先頭の移動距離を調べればよい。このように、**通過算で移動距離を調べる場合は、定点(列車であれば先頭)を基準として移動距離を測定**するとよい。



2 つの列車のすれ違いと追い抜き

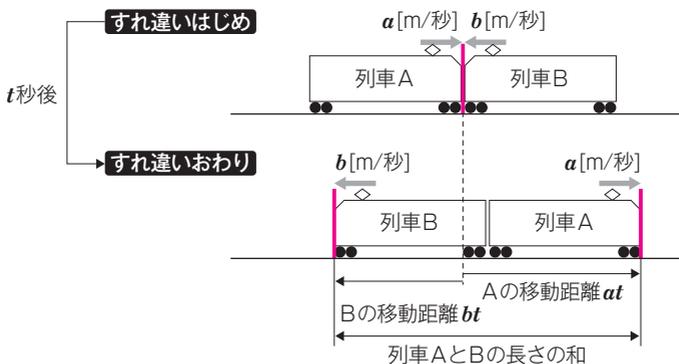
通過算でよく出題される状況として、2つの列車のすれ違いや追い抜きがある。この場合も、2つの列車の先頭の定点の移動に着目して考えていく。ここでは、一般的に考え、2つの列車A、Bの速さをそれぞれ a [m/秒]、 b [m/秒] として考える。

① 逆方向に進むとき

AとBがすれ違う(2つの列車が互いに逆向きに進む)とき、列車の長さは無視できないので通過算でもあり、互いに逆向きに進むので出会い算でもある。

先頭どうしが会ってから最後尾どうしがすれ違うまでの時間を t [秒] とする。A、Bの先頭に付けた定点(赤線)の移動距離を測定すると、出会い算であるからAとBの移動距離の和に着目すれば、(2つの列車の移動距離の和) $= at + bt = (a + b)t$ [m] となり、これは下図のように、AとBの長さの和になる。

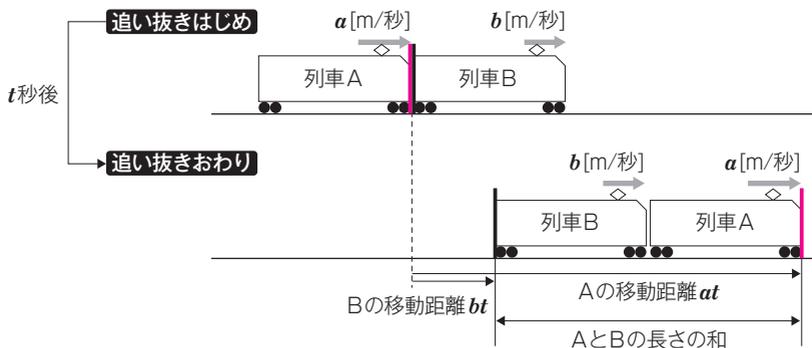
したがって、 $(a + b)t = (\text{2つの列車の長さの和}) \dots \textcircled{1}$ が成り立つ。



② 同じ方向に進むとき

AがBを追い抜く(2つの列車が同じ向きに進む)ときを考える。Aの方がBより速いので、 $a > b$ が成り立つことに注意したい。この場合も、列車の長さは無視できないので通過算でもあり、互いに同じ向きに進むので追いつけ算でもある。

Aの先頭とBの最後尾が会ってからAの最後尾とBの先頭がすれ違うまでの時間を t [秒]とする。Aの先頭の定点(赤線)と、Bの最後尾に付けた定点(黒線)の移動距離を測定すると、追いつけ算であるからAとBの移動距離の差に着目すれば、(2つの列車の移動距離の差) $= at - bt = (a - b)t$ [m]となり、これは下図のように、AとBの長さの和になる⁵。したがって、 $(a - b)t = (2つの列車の長さの和) \dots \textcircled{2}$ が成り立つ。



①、②より、次の公式が成り立つ。

2つの列車のすれ違い・追い抜きの公式

① 【2つの列車のすれ違いの公式】

(2つの列車の速さの和) \times (すれ違いに要する時間) $=$ (2つの列車の長さの和)

② 【2つの列車の追い抜きの公式】

(2つの列車の速さの差) \times (追い抜きに要する時間) $=$ (2つの列車の長さの和)

※ すれ違いの場合は出会い算であるから「速さの和」が、追い抜きの場合は追いつけ算であるから「速さの差」が公式の速さの項に現れるが、いずれの場合も、移動距離の項は「2つの列車の長さの和」になっていることに注意する。

⁵ 「2つの列車の追いつき」の場合は、一方の列車の最後尾の定点を測定するとわかり易い。このように、列車の先頭ばかりではなく、最後尾にも定点を付ける場合がある。

例題 1-11

ある列車が360mのトンネルに入り始めてから通過し終わるまでに28秒かかり、216mの鉄橋を渡り始めてから渡り終わるまでに20秒かかった。

(1) この列車の秒速と長さの組合せとして正しいのはどれか。

	秒速	長さ
①	秒速18m	144m
②	秒速18m	156m
③	秒速20m	156m
④	秒速20m	144m
⑤	秒速24m	144m

(2) この列車が長さ150m、時速86.4kmの列車とすれ違い始めてからすれ違い終わるまでに何秒かかるか。

- ① 3秒 ② 4秒 ③ 5秒 ④ 6秒 ⑤ 7秒

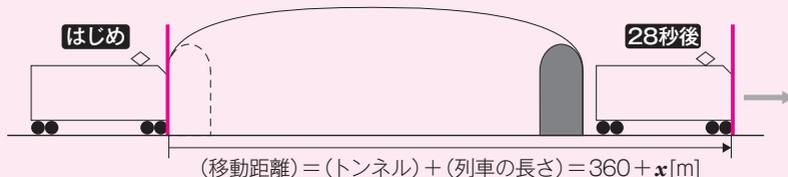
正解へのプロセス

以下に、小問ごとに問題の読み方と状況把握を示す。

(1)

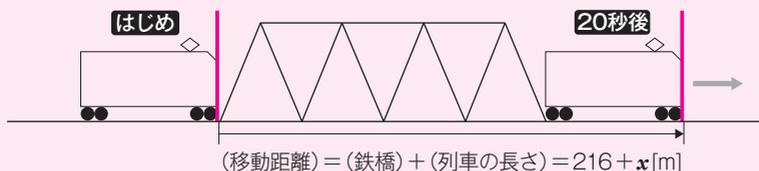
「トンネルに入り始めてから通過し終わる」とは、列車の先頭がトンネルに入り始めてから、列車の最後尾がトンネルを通過し終わる(出終わる)まで移動することである。したがって、列車の先頭に移動の基準となる定点(赤線)を付けて、移動距離を測定すると下図のようになることである。 **作図** **基準**

列車の長さを x [m]とおくと、 **目標** 先頭に着目すれば、 **解法のポイント** この28秒間の移動距離は $360 + x$ [m]である。



「鉄橋を渡り始めてから渡り終える」とは、列車の先頭が鉄橋を渡り始めてから、列車の最後尾が鉄橋を通過し終わるまで移動することである。したがって、列車の先頭に移動の基準となる定点(赤線)を付けて、移動距離を測定すると下図のようになることである。 **作図** **基準**

先頭に着目すれば、**解法のポイント** この20秒間の移動距離は $216 + x$ [m]である。



(2)

2つの列車が「すれ違い始めてからすれ違い終わるまでに何秒かかるか」を問われている。本編で説明したように、先頭の移動距離を作図して定点観測してもよいが、公式を使って素早く求められるようにしたい。 **公式**

解説

(1)

[解法1] 速さの3公式を用いて解く

列車の長さを x [m]、速さを y [m/秒]とおくと、**目標**先頭に着目すれば、トンネルを通過する28秒間の移動距離は $360 + x$ [m]である。このとき、(距離) = (速さ) × (時間) より、 $360 + x = y \times 28 \cdots \textcircled{1}$ が成り立つ。

先頭に着目すれば、**解法のポイント** 鉄橋を渡る20秒間の移動距離は $216 + x$ [m]である。このとき、(距離) = (速さ) × (時間) より、 $216 + x = y \times 20 \cdots \textcircled{2}$ が成り立つ。

$\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を連立すれば、 $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より、 $8y = 144$ となり、 $y = 18$ [m/秒]を得る。これを $\textcircled{1}$ に代入して、 $x = 144$ [m]を得る。

[解法2] 比を用いて解く

列車の長さを x [m]とする。 **目標**

トンネルを通過する際と、鉄橋を渡る際の速さが等しいので、**距離と時間の比が正比**の関係になる。 **解法のポイント** したがって、 $(360 + x) : (216 + x) = 28 : 20 = 7 : 5$ が成り立つ。

(内項の積) = (外項の積) より、方程式 $7 \times (216 + x) = 5 \times (360 + x)$ が成り立つので、整理すると $2x = 288$ となり、これを解けば、 $x = 144$ [m] を得る。

この結果を用いれば、この列車の速さは、 $\frac{216 + x}{20} = \frac{360}{20} = 18$ [m/秒] である。

正解 ①

(2)

時速86.4kmの単位を[m/秒]に変換すると、 86.4 [km/時] = $86.4 \times 1000 \div 60 \div 60 = 24$ [m/秒] である。

すれ違いに要する時間を t [秒] とし、**目標** (2つの列車の速さの和) \times (すれ違いに要する時間) = (2つの列車の長さの和) を用いれば、**公式** $(18 + 24) \times t = 144 + 150$ より、通過時間は $t = \frac{294}{42} = 7$ [秒間] である。

正解 ⑤

6 ダイアグラム

1} ダイアグラム

速さの問題では、タテ軸に位置(距離)、ヨコ軸に時刻(時間)をとったグラフを慣例的に「**ダイアグラム**」と呼んでいる⁶。

これまで、速さの状況把握には道のりの図を使ってきた。速さの3要素である速さ・時間・距離のうち最も視覚化しやすい**距離に着目した作図法が道のりの図**だからである。一方、ダイアグラムを用いると距離だけでなく時間や速さも可視化できる(後述)。したがって、ダイアグラムを使えば、移動の様子を視覚的に整理して理解でき、動きの複雑な速さの問題や抽象的な速さの問題がわかり易く理解できる。ダイアグラムは、状況把握に便利な道具である。

例15

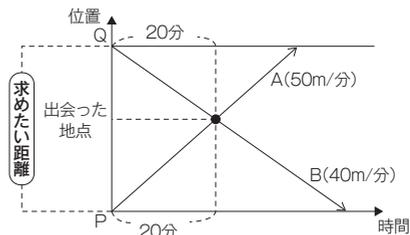
2地点P、Qを結ぶ一本の道路があり、AがPからQへ向かって、BがQからPへ向かって、この道路をそれぞれ同時に歩き始めた。Aは分速50mで、Bは分速40mで歩いたところ、2人が出会うまで20分かかった。PQは何mか。

旅人算で考えた**例1**をダイアグラムを描いて考えてみたい。まず、縦軸(道のりの図に相当)、横軸(時間軸)を描き、縦軸にAとBを定める。そして、AとBを通り、時間軸に平行に直線を引く(Pを縦軸の下におけば、Pは横軸そのものになるので、Pを通る直線を引く必要はない)。

AとBは**一定の速さ**で進むので、A、Bの移動の様子は**直線**のグラフとして表現できる。また、Aの方がBよりも速いので、同時に出発した場合、到着時刻はAの方が早いことに注意すれば、直線の傾斜(傾きの大きさ)はAの方がBより大きい。

交点●はA、Bが同時刻に同位置にいるので「出会い」を表していることに注意すれば、出会うまでにかかった「20分」は図のように書き込める。

PQはAの移動距離である交点●の高さと交点●からQを通る横軸に平行な直線までの高さの和になり、旅人算



⁶ 厳密には、ダイアグラム (diagram) とは「図表」を表し、特に列車やバスなどの運行図表のことである。これを由来として、速さの問題に登場する位置(距離)と時刻(時間)の関係を示すグラフのことを、慣例的に「ダイアグラム」と呼んでいる。

の例9で示したように、Aの移動距離は $50 \times 20 = 1000$ [m]、Bの移動距離は $40 \times 20 = 800$ [m]であるから、 $PQ = 1000 + 800 = 1800$ [m]である。

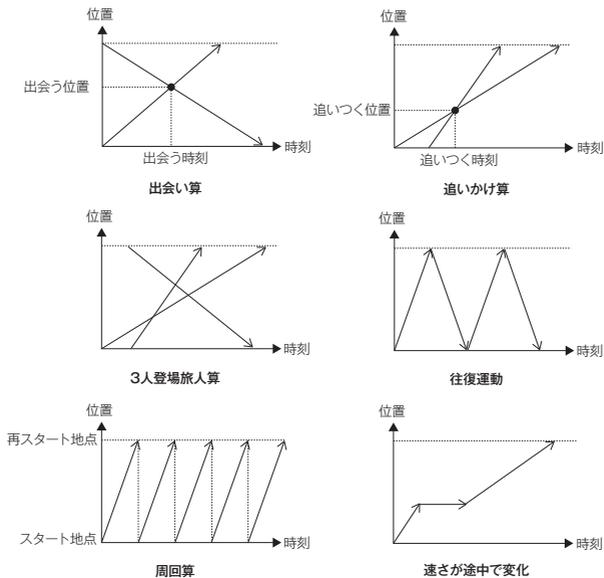
以上より、ダイヤグラムの性質として、次のことが成り立つ。

ダイヤグラムの性質

- ① 一定の速さで進むとき、移動の様子は直線のグラフとして表現できる。
- ② グラフの交点は同時刻に同位置にいること(出会いや追いつき)を表す。
- ③ グラフの傾きの大きさは速さを表している。したがって、グラフの傾きの大きさが大きいほど速く、小さいほど遅い。

2} ダイヤグラムの用法

ダイヤグラム上のグラフの交点は同時刻に同位置にいることを表していることから、特に**旅人算で威力を発揮**し、3人以上登場する旅人算、往復を繰り返しながら何回も出会ったり追いついたりする旅人算や、条件として速さの3要素のうち時間の情報しか与えられていないような旅人算に有効である。



例題 1-12

太郎君は自動車でP町からQ町に向かって、花子さんは自転車でQ町からP町に向かって同時に出発し、一定の速さで同じ道を通った。2人が出会ってから、太郎君は12分後にQ町へ、花子さんは27分後にP町に着いた。このとき、2人が同時に出発してから出会うまでにかかった時間として、正しいのはどれか。

- 1 10分
- 2 12分
- 3 14分
- 4 16分
- 5 18分

正解へのプロセス

① 問題の読み方

本問は、本文中に「2人が出会ってから」とあるので、「**旅人算(出会い算)**」の問題である。 **テーマの把握**

求めるものが「2人が同時に出発してから出会うまでにかかった時間」であるから、太郎君と花子さんが同時に出発してから出会うまでの時間を x [分] とする。 **目標**

次に本問の条件をもとに速さの3要素を表に整理する。 **表** 太郎君の速さを u [km/分]、花子さんの速さを v [km/分]、P町から出会う地点までの距離を a [km]、出会う地点からQ町までの距離を b [km] とすれば、次表のようになる。

	太郎君(出会うまで)	花子さん(出会うまで)	太郎君(出会った後)	花子さん(出会った後)
速さ(は)	u [km/分]	v [km/分]	u [km/分]	v [km/分]
時間(じ)	x [分]	x [分]	12分	27分
距離(き)	a [km]	b [km]	b [km]	a [km]

数値がわかっているのは出会った後の太郎君と花子さんの所要時間である12分と27分であり、これでは未知数(文字)が多過ぎる。このように、速さの3要素のうち時間情報のみしか与えられていない旅人算では、文字が多くなることがわかる⁷。このようなときは、ダイヤグラムを描くと簡単に解ける。 **解法のポイント**

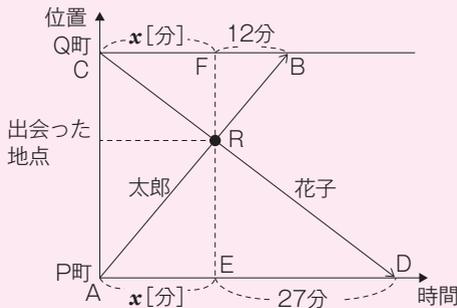
⁷ 例題1-8も「時間情報しかない出会い算」であり、ダイヤグラムを描いて解くことができる。本問を習得後、余力のある読者はダイヤグラムを描いて考えてみてよいのではないだろうか。

なお、ダイヤグラムを使わず、比を使って解くこともできるので、解説には別解として掲載しておく。

② ダイヤグラムを描く

太郎君と花子さんの2人の速度は一定であるから、移動を表すグラフは直線となり、ダイヤグラムを描くと下図のようなになる。本編で紹介した例のように描いていけばよい。描く際は、**グラフの傾きの大きさが大きいほど速く、小さいほど遅い**ことに留意しながら、**グラフの交点は出会いを表す**ことに注意する。

解法のポイント **作図**



③ ダイヤグラムを用いた立式

ダイヤグラムで解く場合は、速さの3公式の他に、**グラフ上の図形の相似比を用いて立式**することがある。**解法のポイント**

$\triangle AER$ と $\triangle BFR$ が相似であることと、 $\triangle DER$ と $\triangle CFR$ が相似であることを用いる。相似については第9節で詳しく述べるが、ダイヤグラムでは次の図形に着目してみてもらいたい。

出会い算では、2人の移動を表す2直線に挟まれた左下と右上および右下と左上の直角三角形が相似である。

※ 現段階では、相似を学んでいないので、ダイヤグラムの問題には別解を付けておく。第9節で相似を学んだあとで、もう一度詳しく読み直してもらいたい。

解説

太郎君と花子さんが同時に出発してから出会うまでの時間を x [分]とする。**目標**
このとき、2人の移動を表すダイヤグラムを描くと、前述の**正解へのプロセス**のよ

うになる。 **作図**

$\triangle AER$ と $\triangle BFR$ が相似であるから $ER:RF=x:12$ …①であり、 $\triangle DER$ と $\triangle CFR$ が相似であるから $ER:RF=27:x$ …②である。さらに①と②の左辺は、 $ER:RF$ が一致することから、 $x:12=27:x$ が成り立つ。 **解法のポイント**

(外項の積) = (内項の積) より、 $x^2=12 \times 27$ …③となり、これを解けば、 $x=18$ [分] を得る。

※ 式③は簡単な2次方程式であるから、解は選択肢を代入し、1つずつ検討してもよい。

[別 解] 比を用いて解く

太郎君と花子さんが同時に出発してから出会うまでの時間を x [分]とする。 **目標**

Pから2人が出会った地点までの同じ距離を、太郎君は x [分]、花子さんは27分かけて進み、Qから2人が出会った地点までの同じ距離を、太郎君は12分、花子さんは x [分]かけて進んでいる。

2人が同じ距離を移動するとき、時間と速さは逆比の関係である。また、2人の速さは一定であるから、2人が出会う前後で2人の速さの比が変わらないことより、(太郎君の速さ) : (花子さんの速さ) = $x:27=12:x$ が成り立つ。

(外項の積) = (内項の積) より、 $x^2=27 \times 12$ となり、これを解けば、 $x=18$ [分] を得る。

正解 5

7 仕事算

1 仕事算

仕事の速さに関する問題で、**全体量の変化しない仕事を処理する問題を「仕事算」**という。

例16

AさんとBさんが、ある仕事を2人で一緒にすることになった。Aさんはこの仕事を1人だけで3日かけて完了し、Bさんはこの仕事を1人だけで6日かけて完了するという。このとき、2人で一緒に仕事をすると何日で完了することができるか。

仕事算の問題では、**仕事の全体量を1とする**。これは、仕事の定量化であり、私たちが普段から「仕事が半分終わった」などと、**仕事の進み具合を割合(分数)で表現**することからも理解できる。

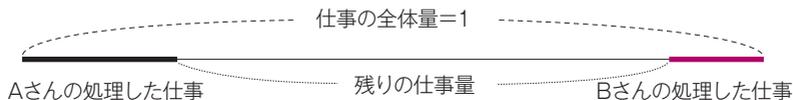
Aさんはこの仕事を1人だけで3日かけて完了するので、1日あたり $\frac{1}{3}$ の仕事を行う。速さとは単位時間あたりの変化量であるから、この「1日あたり $\frac{1}{3}$ の仕事」はAさんの仕事の速さを表している。Bさんはこの仕事を1人だけで6日かけて完了するので、Bさんの仕事の速さは「1日あたり $\frac{1}{6}$ 」である。

2人で一緒に仕事をすると、1日あたり $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ の仕事を行う。仕事の全体量が1であり、「1日あたり $\frac{1}{2}$ の仕事を行う」ということは、 $1 \div \frac{1}{2} = 2$ [日]で完了することがわかる⁸。

⁸ 当たり前だが、仕事を2人で行えば、仕事の所要日数は1人で行うときに比べて短縮する。2人で仕事を行うからといって、2人の仕事の所要日数を3+6=9 [日] と単純に足してはいけない。

2 仕事算の公式

例16からもわかるように、仕事算は割合の一種であるとも考えることもできる。そこで、2人で仕事をするときは、**線分図を描いて考える**とわかりやすい。



上図からもわかるように、仕事算は次のように立式するとよい。

仕事算の公式

- ① (仕事の全体量)を1とすれば、仕事の速さが一定のとき、

$$(\text{仕事の速さ}) = \frac{1}{(\text{仕事を終えるのにかかる時間})}$$

が成り立つ。

- ② (仕事の全体量) - (各人の全日程で処理した仕事の和) = (残りの仕事量)

特に、仕事を完遂するとき、(残りの仕事量)は0になり、

$$(\text{各人の全日程での仕事の和}) = (\text{仕事の全体量}) = 1$$

である。

※1 仕事の速さを考えるとき、「1時間あたり」か「1日あたり」かなどの、速さの単位に気をつけなくてはならない。

※2 ②式は「旅人算の公式」(はじめの2人の距離) - (縮まった距離) = (おわりの2人の距離)と同型であり、線分図上の2人の進行方向が逆向きであることから、仕事算は出会い算の一種とも捉えることができる。

例題 1-13

ある仕事を仕上げるのに長崎君 1 人で15日かかり、佐賀君 1 人で10日かかる。この仕事を 2 人で一緒に行うことにしたが、途中で佐賀君が病気で5日休んだ。この仕事が完成するのにかかった日数として、正しいのはどれか。

- 1 7日
- 2 8日
- 3 9日
- 4 10日
- 5 11日

正解へのプロセス

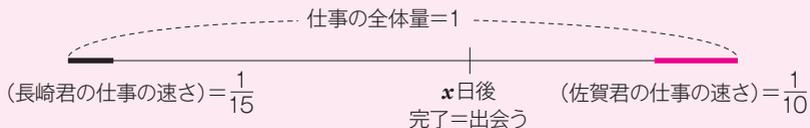
まずは**仕事の全体量を 1 とする**。 **基準**

そして、**各人の仕事の速さを割合(分数)で表す**。 **解法のポイント**

この仕事を終えるのに、長崎君は 1 人で15日かかり、佐賀君は 1 人で10日かかるので、彼らの 1 日あたりの仕事の速さは、長崎君、佐賀君それぞれ $\frac{1}{15}$ 、 $\frac{1}{10}$ である。 **公式**

このとき、この仕事の**完成日数を x [日]**とすれば、**目標**長崎君はこの x [日]の間休まず仕事を行うが、佐賀君は 5 日休んだため、佐賀君の仕事の実働日数は $x - 5$ [日]である。

このとき、完了までの間で進む 2 人の仕事の進み具合を**線分図**に表せば次のようになる。 **解法のポイント** **作図**



仕事算における(各人の仕事の進み具合)=(線分の長さ)が速さの 3 要素における距離に対応する。そこで、長崎君、佐賀君の 2 人の速さの 3 要素を表に整理すると、下表のようになり、**要素に一致するものがないことがわかる**。したがって、本問は比を用いて解くことはできない。

	長崎君	佐賀君
速さ(は)	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{10}$
時間(じ)	x [日]	$x-5$ [日]
距離(き)	$\frac{1}{15}x$	$\frac{1}{10}(x-5)$

仕事算は、割合の一種であるが、出会い算でもあるので、距離の和である「2人の線分の長さ(仕事の進み具合)の和」に着目して立式すればよい。結果的には、仕事算の公式の②を用いることと同じである。 **公式**

解説

この仕事の完成日数を x [日]とする。 **目標**

問題の条件で仕事を行うとき、長崎君は x [日]仕事を行うが、佐賀君は5日休んだため、佐賀君の仕事の実働日数は $x-5$ [日]である。仕事算の公式の②である(各人の全日程での仕事の和)=(仕事の全体量)=1より、 **公式**

$$\frac{1}{15}x + \frac{1}{10}(x-5) = 1$$

が成り立つ。

これを解けば、 $x=9$ [日]である。

正解 ③

8 ニュートン算

1 ニュートン算

仕事や処理の速さに関する問題で、全体量が**変化する**場合の仕事や処理の問題を「**ニュートン算**」という。ニュートン算では仕事に限らず、様々な量が登場する。

例17

ある牧草地に草が360本生えている。この牧草地に草を食べる牛を3頭入れると12日で草がなくなり、牛を4頭入れると8日で草がなくなる。この牧草地に牛を5頭入れると草は何日でなくなるか。ただし、草は一定の割合で生え、どの牛も1日に食べる草の量は一定であるものとする⁹。

草が1日で生える量を x [本]、牛1頭が1日で食べる草の量を y [本]とする。3頭の牛が12日間で食べた草の量は $y \times 3 \times 12 = 36y$ [本]であり、これははじめに生えていた360本と、新たに生えてきた $x \times 12$ [本]を合わせた $360 + 12x$ [本]に一致する。したがって、 $360 + 12x = 36y \cdots \textcircled{1}$ が成り立つ。

同様に、4頭の牛が8日間で食べた草の量は $y \times 4 \times 8 = 32y$ [本]であり、これははじめに生えていた360本に、新たに生えてきた $x \times 8$ [本]を合わせた $360 + 8x$ [本]に一致するので、 $360 + 8x = 32y \cdots \textcircled{2}$ が成り立つ。

①と②を連立すれば、 $x = 15$ [本]、 $y = 15$ [本]となる。5頭の牛に草が食べ尽くされる日数を t [日]とおけば、5頭の牛が t [日]で食べた草の量は $15 \times 5 \times t = 75t$ [本]であり、これははじめに生えていた360本に、新たに生えてきた $15 \times t = 15t$ [本]を合わせた $360 + 15t$ [本]に一致する。よって、 $360 + 15t = 75t \cdots \textcircled{3}$ となり、 $t = 6$ [日]である。

①、②、③は次のように考えてもよい。

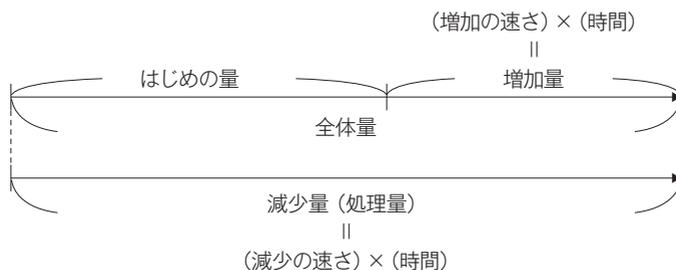
$$\begin{aligned} & (\text{はじめに生えていた草}) + (\text{新たに生えてきた草}) - (\text{牛が食べた草}) \\ & \hspace{15em} = (\text{残っている草}) \end{aligned}$$

と考えれば、食べ尽くされてしまえば、(残っている草) = 0なので、①は $360 + 12x - 36y = 0$ 、②は $360 + 8x - 32y = 0$ 、③は $360 + 15t - 75t = 0$ である。つまり、(はじめの量) + (増加の速さ) \times (時間) - (減少の速さ) \times (時間) = (おわりの量) で立式すればよい。

⁹ 牧草と牛の問題は、物理学者ニュートンの著書に出てきた問題例であり、「ニュートン算」という呼び名はこのことに由来する。

2 ニュートン算の公式

上の例17からもわかるように、ニュートン算では次式が成り立つ。覚えるというより次の図をイメージをしながら理解したい。



ニュートン算の公式

$$(\text{はじめの量}) + (\text{増加の速度}) \times (\text{時間}) - (\text{減少の速度}) \times (\text{時間}) = (\text{おわりの量})$$

特に、処理が終了するときは、(おわりの量) = 0 であり、

$$(\text{はじめの量}) + (\text{増加の速度}) \times (\text{時間}) - (\text{減少の速度}) \times (\text{時間}) = 0$$

が成り立つ。

※1 (増加の速度)および(減少の速度)は単位時間あたりの量である。

※2 例17の後半で取り上げた考え方によれば、上の公式は(はじめの量) - {(減少の速度) - (増加の速度)} × (時間) = (おわりの量)となる。これは、「旅人算の公式」(はじめの2人の距離) - (縮まった距離) = (おわりの2人の距離)と同型であり、線分図上では、増加と減少(処理)の進む方向(矢印)が互いに同じ向きであることから、ニュートン算は追いかけ算の一種と捉えることができる。

例題 1-14

ある遊園地では、開園前に行列が300人以上できた場合には、時間を繰り上げて開園することになっている。その日は開園前から入園希望者が毎分20人の割合で並び始めたので、開園前に行列が300人となり、その時点で開園した。開園後も同様の割合で行列に加わる者が続いたが、入場口を1つだけ開けたところ、15分で行列が解消した。入場口を2つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間として、正しいのはどれか。

- 1 3分
- 2 5分
- 3 7分
- 4 9分
- 5 11分

正解へのプロセス

本問は、入り口に滞った人を入場口が捌く処理の速さの問題であり、入り口には時々刻々人が流れ込むため、**全体量が増加する**ことがわかる。したがって、本問は「ニュートン算」の問題である。 **テーマの把握**

ニュートン算では公式を使って立式していけばよい。 **解法のポイント**

本問は「行列が解消する」ことから、処理が終了するので、

$$(\text{はじめの量}) + (\text{増加の速さ}) \times (\text{時間}) - (\text{減少の速さ}) \times (\text{時間}) = 0$$

を用いる。 **公式**

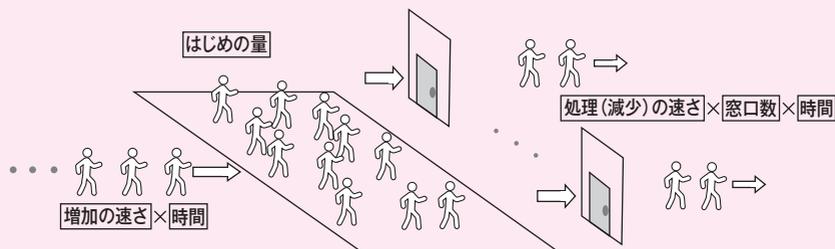
そこで、ニュートン算の公式に対応する量を問題文を読みながら確認していく。

「その日は開園前から入園希望者が毎分20人の割合で並び始めた」より、(増加の速さ) = 20 [人/分]である。「開園前に行列が300人となり、その時点で開園した」より、「その時点」がこの問題の処理のスタート(「はじめ」)になるので、(はじめの量) = 300 [人]である。「入場口を1つだけ開けたところ」、「入場口を2つ開けて」とあるので、入場口が「処理」を行っており、入場口が複数ある。このように、処理するものが複数あるときは、1つあたりで処理できる量を考えると立式がうまくいく。つまり、(入場口1つあたりの処理(減少)の速さ) = x [人/分]とおけば、「入場口を1つだけ開けたところ」の(処理(減少)の速さ) = x [人/分]であり、2つ開けると2倍の速さで処理できることより、「入場口を2つ開けて開園していたときの(処理(減少)の速さ) = $2x$ [人/分]と表せる。

そして、「入場口を2つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間」 = t [分]

とおく。 **目標**

次に、状況把握のために、問題文の様子を図に描けば、次のようになる。 **作図**



未知数は x と t の2つあり、「入場口を1つだけ開けたところ、15分で行列が解消した」、「入場口を2つ開けて開園していたとき、行列が解消する時間(= t [分])として、正しいのはどれか」と条件が2つあるので、公式を2式立てて連立する。なお、公式1つ目では(時間)=15[分]、公式2つ目では(時間)= t [分]である。

公式

このように、ニュートン算では原則的に未知数について文字を複数おき、条件の数だけニュートン算の公式を立て、連立方程式を解いていけばよい。

解説

300人並んでから毎分20人ずつ増えている状態で入場口を1つ開けたとき、行列が15分で解消したので、入場口1つに1分あたりに入場できる人数を x [人/分] とすれば、

$$(\text{はじめの量}) + (\text{増加の速さ}) \times (\text{時間}) - (\text{減少の速さ}) \times (\text{時間}) = 0$$

より、 **公式** $300 + 20 \times 15 - x \times 15 = 0$ が成り立つ。これを解けば、 $x = 40$ [人] である。つまり、入場口1つに1分あたりに入場できる人数は40人である。

この入場口を2つ開けると2倍の速さ(1分あたり $40 \times 2 = 80$ [人])で処理できる。これに気を付けて、行列が解消する時間を t [分] とおけば、 **目標** ニュートン算の公式より、 $300 + 20 \times t - (40 \times 2) \times t = 0$ が成り立つ。これを解けば、 $t = 5$ [分] である。つまり、300人の行列は入場口を2つ開けると5分で解消する。

正解 **2**

問題1

あるランナーは、通常、平坦な道24kmを2時間40分で走る。このランナーが、ある山の頂上から麓まで12kmの道のりを下り、折り返して頂上まで12kmの道のりを上る全長24kmのコースを走った。下りの平均速度は通常
の速度(平坦な道での平均速度)より6km/h速く、上りの平均速度は通常
の速度より6km/h遅かった。このコースを完走するのに要した時間は
いくらか。

国家専門職2010

- 1 2時間08分
- 2 2時間24分
- 3 2時間40分
- 4 3時間45分
- 5 4時間48分

解説

正解 5

「速さ」の問題である。 **テーマの把握**

特に本問では、**速さの3公式**や**単位換算**を見ていきたい。 **公式** **解法のポイント**

下り、上りで速さが異なるので、かかった時間も分けて求めなければならない。そこで、まずは通常の方法を求めよう。

24kmの道のりを2時間40分 $=2+\frac{1}{60}\times 40$ [時間] $=\frac{8}{3}$ [時間] で走るので、(速さ) = (距離) ÷ (時間) より $24 \div \frac{8}{3} = 9$ [km/h] である。これをもとに、下りの所要時間、上りの所要時間をそれぞれ求める。

下りに進んだ距離は12kmで、下りの平均速度は $9+6=15$ [km/h] であるので、下りの所要時間は (時間) = (距離) ÷ (速さ) より $12 \div 15 = \frac{12}{15}$ [時間] $= \frac{4}{5}$ [時間] である。

上りに進んだ距離は12kmで、上りの平均速度は $9-6=3$ [km/h] であるので、上りの所要時間は (時間) = (距離) ÷ (速さ) より $12 \div 3 = 4$ [時間] である。

よって、完走するのに要した時間は、(下りの所要時間) + (上りの所要時間) $= \frac{4}{5} + 4$ [時間] $= 4$ [時間] $+ 60 \times \frac{4}{5}$ [分] $= 4$ 時間48分である。

問題2

5km離れた2地点A、B間を同じ経路で、兄はオートバイで、弟は自転車でそれぞれ走って一往復することになり、13時に弟が地点Aを出発した。その32分後に兄が地点Aを出発し、地点Bの手前1kmの地点で弟を追い越した。その後、復路を走る兄が弟とすれ違う時刻として、正しいのはどれか。ただし、兄弟が走る速さはそれぞれ一定であり、兄は弟の3倍の速さで走った。

東京都I類2011

- 1 13時44分
- 2 13時54分
- 3 14時04分
- 4 14時14分
- 5 14時24分

解説

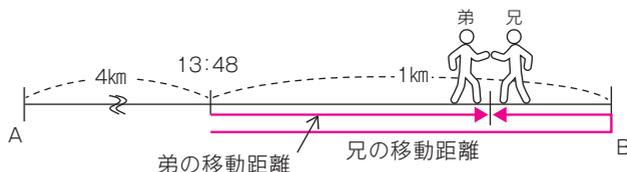
正解 2

「旅人算」の問題である。 **テーマの把握**

「兄は弟の3倍の速さで走った」とあるので、兄の速さ：弟の速さ＝3：1として、**比を用いて解く。** **解法のポイント**

まず、地点Bの手前1kmの地点の兄と弟の通過時刻を求める。そこで、この地点までの兄の所要時間を x [分]とおく。 **目標** このとき、弟の所要時間は $x+32$ [分]であり、移動距離は兄、弟ともに $5-1=4$ [km]である。移動距離(＝4 km)が一致しているので、**速さと時間が逆比**の関係になる。 **解法のポイント**

兄の速さ：弟の速さ＝3：1より、兄が弟を追い越した4 km進んだ地点までの所要時間の比は、速さの逆比であり、兄の所要時間：弟の所要時間＝1：3が成り立つ。したがって、 $x : (x+32) = 1 : 3$ である。(外項の積)＝(内項の積)より、 $x \times 3 = (x+32) \times 1$ より $x=16$ [分]である。ゆえに、13時32分の16分後の13時48分に兄は弟に追いつく。ここまですら**線分図に描く**と、下のようになる。 **作図**



兄は4 km＝4000mを $x=16$ [分]で走っているなので、兄の速さは $\frac{4000}{16}=250$ [m/分]となる。弟の速さはこの $\frac{1}{3}$ 倍であるから $\frac{250}{3}$ [m/分]である。 **具体化**

兄が弟を13時48分に追い越してからすれ違うまでに y [分]かかったとする。 **目標** 兄と弟の移動距離の和に着目すると、図より、2人の移動距離の和が1 kmの往復分の2 km＝2000mに相当する。 **解法のポイント**

(2人の移動距離の和)＝ $250 \times y + \frac{250}{3} \times y = 2000$ [m]となり、これを解けば、 $y=6$ [分]である。

よって、復路を走る兄が弟とすれ違う時刻は13時48分の6分後の13時54分である。

問題3

A、B 2台の自動車が、1周5kmのコースを同一地点から同じ向きに同時に走り出すと、Aは15分ごとにBを追いつ、逆向きに同時に走り出すと、AとBは3分ごとにすれ違ふ。このとき、Aの速さはどれか。

特別区 I 類2005

-
- 1 0.8km/分
 - 2 0.9km/分
 - 3 1.0km/分
 - 4 1.1km/分
 - 5 1.2km/分

解説

正解 3

「周回算」の問題である。 **テーマの把握**

AとBの速さをそれぞれ x [km/分]、**目標** y [km/分]とする。

AとBが同じ向きに同時に走り出すと、Aは15分ごとにBを追い越すので、Aの方がBより速く $x > y$ であり、**(2人の速さの差) × (追い抜きの周期) = (周の長さ)**より、**公式** $(x - y) \times 15 = 5 \cdots ①$ が成り立つ。

AとBが逆向きに同時に走り出すと、AとBは3分ごとにすれ違うので、**(2人の速さの和) × (すれ違いの周期) = (周の長さ)**より、**公式** $(x + y) \times 3 = 5 \cdots ②$ が成り立つ。

①の両辺を5で割って整理すれば、結局、次の連立方程式を解けばよいことがわかる。

$$3x - 3y = 1$$

$$3x + 3y = 5$$

求めたいのは x であるから、2式を足して、 $6x = 6$ を得る。よって、 $x = 1.0$ [km/分]である。

問題4

ある川に沿って、20km離れた上流と下流の2地点間を往復する船がある。今、上流を出発した船が、川を下る途中でエンジンが停止し、そのまま24分間川を流された後、再びエンジンが動き出した。この船が川を往復するのに、下りに1時間、上りに1時間を要したとき、川の流れる速さはどれか。ただし、静水時における船の速さは一定とする。

特別区I類2014

- 1 5 km/時
- 2 6 km/時
- 3 7 km/時
- 4 8 km/時
- 5 9 km/時

解説

正解 1

「流水算」の問題である。 **テーマの把握**

下りでは、途中でエンジンが停止してしまったため船自身の速度が変化している。速度が一定でない限り、「速さと時間が逆比」という関係を単純に使うことはできない。したがって、下りと上りで速さの3公式から2式を立てて、連立方程式で解けばよい。

下りと上りの距離が「20km」と問題に与えられていることに着目すれば、距離について式を立てるとよい、と考えたい。

まずは、静水時での船の速度を x [km/時]、川の流速を y [km/時] とおく。 **目標**

下りは、船自身の速度が変化しているので、それぞれにかかった時間を考えると、エンジンが停止している時間は $24分 = \frac{1}{60} \times 24時間 = \frac{2}{5}$ 時間で、この間は(岸から見た下りの速さ) = (静水時の速さ) + (流速) = $0 + y = y$ [km/時] で移動する。 **公式**

エンジンが動いている時間は $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ [時間] で、(岸から見た下りの速さ) = (静水時の速さ) + (流速) = $x + y$ [km/時] で移動する。 **公式**

このとき、下りの距離は $y \times \frac{2}{5} + (x + y) \times \frac{3}{5}$ [km] と表せ、この値が「20km」であるので、次の式が成り立つ。

$$y \times \frac{2}{5} + (x + y) \times \frac{3}{5} = 20 \cdots \textcircled{1}$$

一方、上りについては、(岸から見た上りの速さ) = (静水時の速さ) - (流速) = $x - y$ [km/時] で移動する。 **公式**

このとき、上りの距離についても下りの距離と同様に次式が成り立つ。

$$(x - y) \times 1 = 20 \cdots \textcircled{2}$$

①の両辺に5を掛けると、 $2y + 3(x + y) = 100$ より、 $3x + 5y = 100 \cdots \textcircled{3}$ である。②より $x = 20 + y$ となり、③に代入すると、 $y = 5$ [km/時] である。

問題5

直線の道路を走行中の長さ18mのトラックを、トラックと同一方向に走行中の長さ2mのオートバイと長さ5mの自動車が、追い付いてから完全に追い抜くまでに、それぞれ $\frac{8}{3}$ 秒と $\frac{46}{5}$ 秒かかった。オートバイの速さが自動車の速さの1.4倍であるとき、オートバイの時速として、正しいのはどれか。ただし、トラック、オートバイ、自動車のそれぞれの速さは、走行中に変化しないものとする。

東京都I類2020

- 1 45km/時
- 2 54km/時
- 3 63km/時
- 4 72km/時
- 5 81km/時

解説

正解 3

「長さ18mのトラック」、「長さ2mのオートバイ」、「長さ5mの自動車」とあるので、移動する物体の長さを考慮に入れる速さの問題であることがわかり、「**通過算**」の問題であることがわかる。

さらに、「トラックと同一方向に走行中の長さ2mのオートバイと長さ5mの自動車が、追いついてから完全に追い抜くまでに、それぞれ $\frac{8}{3}$ 秒と $\frac{46}{5}$ 秒かかった」とあるので、「**2つの列車の追い越し**」の問題であることがわかる。 **テーマの把握**

「2つの列車の追い越し」の問題では公式、

(2つの列車の速さの**差**)×(追い抜きに要する時間)=(2つの列車の長さの**和**)を利用して解くとよい。 **公式**

自動車の速さを x [m/秒]、トラックの速さを y [m/秒]とおくと、オートバイの速さは $1.4x$ [m/秒]とおける。 **目標**

長さ18mのトラックを長さ2mのオートバイが完全に追い抜くまでに $\frac{8}{3}$ 秒かかったので、公式より、 $(1.4x - y) \times \frac{8}{3} = 18 + 2 \cdots \text{①}$ が成り立つ。

同様に、長さ18mのトラックを長さ5mの自動車が完全に追い抜くまでに $\frac{46}{5}$ 秒かかったので、公式より、 $(x - y) \times \frac{46}{5} = 18 + 5 \cdots \text{②}$ が成り立つ。

①を変形すると $1.4x - y = 20 \div \frac{8}{3} = \frac{15}{2} \cdots \text{③}$ 、②を変形すると $x - y = 23 \div \frac{46}{5} = \frac{5}{2} \cdots \text{④}$ となる。③-④より、 $0.4x = \frac{10}{2} = 5$ より、 $x = \frac{5}{0.4} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2} = 12.5$ [m/秒]で、オートバイの速さは $1.4x = 1.4 \times 12.5 = 17.5$ [m/秒]である。

単位変換をすれば、 17.5 [m/秒] $= 17.5 \times 60 \times 60 \div 1000 = 63$ [km/時] であるから、オートバイの時速は、63km/時である。

問題6

X区役所とY区役所を結ぶ道がある。この道路を、Aは徒歩でX区役所からY区役所へ向かい、BはAの出発の10分後に自転車でY区役所を出発してX区役所へと向かった。2人が出会った時点から、Aは25分後にY区役所に到着し、Bは8分後にX区役所に到着した。2人が出会ったのは、AがX区役所を出発した時点から何分後か。ただし、2人の速度は一定とする。

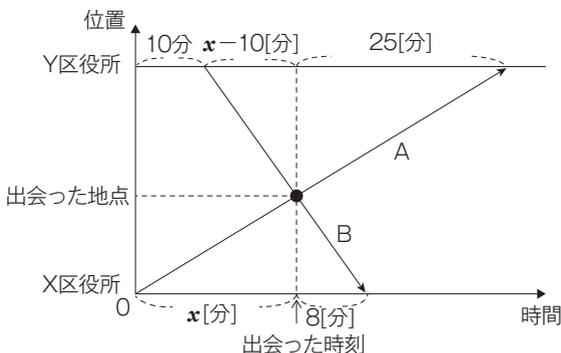
特別区I類2011

- 1 15分後
- 2 20分後
- 3 25分後
- 4 30分後
- 5 35分後

解説

正解 2

時間情報しか与えられていない「旅人算」の問題であるから、ダイヤグラムを描いて考えていく。 **テーマの把握** **作図**



AがX区役所を出発してBと出会うまでの時間を x [分後]とする。 **目標**

2人の速度は一定であるから、AとBの移動を表すグラフは直線となり、2人の出発時刻が異なることに注意すれば、この問題のダイヤグラムは上図のようになる。BはAの出発の10分後に自転車でY区役所を出発してX区役所へと向かったので、BはAと出会うまでに $x-10$ [分]かかることになる。

出会い算では、2人の移動を表す2直線に挟まれた左下と右上および右下と左上の直角三角形が相似であることから、相似比を考えることで、次の比例関係を得る。 **解法のポイント**

$$x : 25 = 8 : (x - 10)$$

(外項の積) = (内項の積) より、2次方程式 $x \times (x - 10) = 25 \times 8 \cdots \textcircled{1}$ となり、展開して整理すれば、 $x^2 - 10x - 200 = 0$ となり、 $(x - 20)(x + 10) = 0$ と因数分解できる。これを解けば、 $x = 20$ 、 -10 である。 x は時間であるから正であり、 $x = 20$ [分後] である。

したがって、2人が出会ったのはAがX区役所を出発した時点から20分後である。

※ 2次方程式について詳しくは巻末の付録を参照されたいが、2次方程式 $\textcircled{1}$ を展開や因数分解できなくても、選択肢を $\textcircled{1}$ に代入し、1つずつ検討すれば、正

解を見つけ出すことはできる。

[別 解] 比を用いて解く

AがX区役所を出発してから x 分後に2人が出会うとすると、X区役所から2人が出会った地点までの同じ距離を、Aは x 分間、Bは8分間かけて進み、Y区役所から2人が出会った地点までの同じ距離を、Aは25分間、Bは $x-10$ [分間] かけて進んでいる。

2人が同じ距離を移動するとき、時間と速さは逆比の関係になる。

解法のポイント

また、2人の速さは一定であるから、出会う前後で2人の速さの比が変わらないことより、(Aの速さ):(Bの速さ) $=8:x=(x-10):25$ となり、これを解けば、 $x=20$ [分後] である。

問題7

ある作業をA、B、Cの3名で行う。1日に行う仕事量の割合が $A : B : C = 3 : 3 : 2$ であり、3名が休まずに仕事をすると30日で終了することがわかっている。今、作業の終了までにAが5日、Bが3日、Cが4日休むとき、この作業に要する日数はどれか。

特別区I類2011

-
- 1 33日
 - 2 34日
 - 3 35日
 - 4 36日
 - 5 37日

解説

正解 2

全体量の変化しない仕事を処理する問題であるから、本問は「仕事算」の問題である。**テーマの把握**

仕事の全体量を1とする。**解法のポイント**

1日に行う仕事量の割合がA : B : C = 3 : 3 : 2であるから、

$$\begin{cases} 1日に行うAの仕事の割合=3k \\ 1日に行うBの仕事の割合=3k \\ 1日に行うCの仕事の割合=2k \end{cases}$$

とおく。**具体化**

したがって、3名で仕事をすれば、1日あたり $3k+3k+2k=8k$ の仕事が進む。3名が休まずに仕事をするので30日で終了するので、仕事の全体量が1である

ことより、 $8k \times 30 = 1$ が成り立ち、これを解けば $k = \frac{1}{240}$ となる。

実際に仕事を終わるのに要する日数を x [日] とすれば、**目標** 作業の終了までにAが5日、Bが3日、Cが4日休むので、A、B、Cの実働日数はそれぞれ $x-5$ [日]、 $x-3$ [日]、 $x-4$ [日]である。この実働日数で、全体量1の仕事を終える。

(Aの仕事量) = $3k \times (x-5) = \frac{1}{80}(x-5)$ 、(Bの仕事量) = $3k \times (x-3) = \frac{1}{80}(x-3)$ 、(Cの仕事量) = $2k \times (x-4) = \frac{1}{120}(x-4)$ であり、(各人の全日程での仕事

の和) = (仕事の全体量) = 1より、**公式** (Aの仕事量) + (Bの仕事量) + (Cの仕事量) = (仕事の全体量) = 1であるから、次式が成り立つ。

$$3 \times \frac{1}{240}(x-5) + 3 \times \frac{1}{240}(x-3) + 2 \times \frac{1}{240}(x-4) = 1$$

これを解けば、 $x=34$ [日] である。

問題8

ある施設に設置されたタンクには、常に一定の割合で地下水が流入しており、このタンクにポンプを設置して排水すると、3台同時に使用したときは21分、4台同時に使用したときは15分でそれぞれタンクが空となる。この場合、このタンクを7分で空にするために必要なポンプの台数として、正しいのはどれか。ただし、排水開始前にタンクに入っていた水量はいずれも等しく、ポンプの毎分の排水量はすべて等しくかつ一定である。

東京都 I 類2011

- 1 6台
- 2 7台
- 3 8台
- 4 9台
- 5 10台

解説

正解 3

「ポンプで排水する」という処理の速さの問題であり、「タンクには、常に一定の割合で地下水が流入」とあるので、仕事の全体量が増加する問題である。したがって、本問は「ニュートン算」の問題である。 **テーマの把握**

ニュートン算では原則的に未知数について文字を複数おき、条件の数だけニュートン算の公式を立て、連立方程式を解いていけばよいので、問題文を読みながら、未知数に対し、必要な文字を設定していく。まずは、ニュートン算の公式、

(はじめの量) + (増加の速さ) × (時間) - (減少の速さ) × (時間) = (おわりの量)
を確認しておく。 **公式**

本問では、最終的に「タンクを空にする」という条件しか出てこないなので、(おわりの量) = 0としてよい。(はじめの量)は「排水開始前にタンクに入っていた水量」が対応する。(増加の速さ)は「常に一定の割合で流入する地下水」が対応する。また、本問は、ポンプが排水という「処理」を行っており、ポンプが複数台あるので、ポンプ1台あたりが1分間に排水する量を考えると立式がうまくいく。このとき、(減少の速さ) = (ポンプ1台あたりが1分間に排水する量) × (台数) である。

解法のポイント

そこで、排水前にタンクに入っていた水量を a 、1分間に流入する地下水の量を x 、1台のポンプで1分間に排水する量を y とおく¹⁰。

まず、「ポンプを3台同時に使用したときは21分でタンクが空になる」ので、(減少の速さ) = $y \times 3$ であり、ニュートン算の公式より、次の式が成り立つ。

$$a + x \times 21 - (y \times 3) \times 21 = 0 \Leftrightarrow a + 21x = 63y \cdots \textcircled{1}$$

次に、「ポンプを4台同時に使用したときは15分でタンクが空になる」ので、(減少の速さ) = $y \times 4$ であり、ニュートン算の公式より、次の式が成り立つ。

$$a + x \times 15 - (y \times 4) \times 15 = 0 \Leftrightarrow a + 15x = 60y \cdots \textcircled{2}$$

さらに、「タンクを7分で空にする」ために必要なポンプの台数を n [台]とおくと、 **目標** (減少の速さ) = $y \times n$ であり、ニュートン算の公式より、次の式が成り立つ。

$$a + x \times 7 - (y \times n) \times 7 = 0 \Leftrightarrow a + 7x = 7ny \cdots \textcircled{3}$$

①、②、③は未知数 a 、 x 、 y 、 n の連立方程式である。

¹⁰ 水の量の単位[L]は問題に記載がなかったので、解説でも付けなかったが、[L]を付けても一般性は失わない。一般に、単位は付けた方が具体的であるので、理解の助けになるならば、[L]を付けてもよい。

これを解くために、①-②を計算すれば、 $y=2x$ …④が得られ、④を①に代入すると、 $a=105x$ …⑤となる。これら④と⑤を③に代入すると、次の式が得られる。

$$105x+7x=7n \times 2x \cdots \textcircled{6}$$

$x \neq 0$ より、⑥の両辺を x で割ると、 $105+7=14n$ となり、 n について解くと、 $n=8$ [台] である。

※ 厳密に言えば、①、②、③は式が3つに対し、未知数が4つあるので、連立不定方程式である。したがって、 a 、 x 、 y の値は不定であり、具体的には求められない。

問題編

第1回	文章題					都：2022年	正答率	76.0%
数-No.1	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

観客席がS席，A席，B席からなるバドミントン競技大会決勝のチケットの販売状況は，次のとおりであった。

ア チケットの料金は，S席が最も高く，次に高い席はA席であり，S席とA席の料金の差は，A席とB席の料金の差の4倍であった。

イ チケットは，S席が60枚，A席が300枚，B席が900枚売れ，売上額の合計は750万円であった。

ウ B席のチケットの売上額は，S席のチケットの売上額の5倍であった。

エ S席，A席，B席のチケットの料金は，それぞれの席ごとに同額であった。

以上から判断して，S席のチケットの料金として，正しいのはどれか。

1. 14,000円
2. 15,000円
3. 16,000円
4. 17,000円
5. 18,000円

第1回	文章題					都：2017年	正答率	69.0%
数-No.2	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	C	

ある4人家族の父，母，姉，弟の年齢について，今年の元日に調べたところ，次のA～Dのことが分かった。

A 姉は弟より4歳年上であった。

B 父の年齢は姉の年齢の3倍であった。

C 5年前の元日には，母の年齢は弟の年齢の5倍であった。

D 2年後の元日には，父と母の年齢の和は，姉と弟の年齢の和の3倍になる。

以上から判断して，今年の元日における4人の年齢の合計として，正しいのはどれか。

1. 116歳
2. 121歳
3. 126歳
4. 131歳
5. 136歳

第1回	文章題					裁：2016年	正答率	69.0%
数-No.3	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	C	

長さ2mの針金を2本に切り、それぞれの針金を使い2つの正方形を作ったところ、面積の和が $1,828\text{cm}^2$ であった。このとき、小さい方の正方形の面積はいくらか。

1. 64cm^2
2. 81cm^2
3. 100cm^2
4. 121cm^2
5. 144cm^2

第1回	文章題					区：2008年	正答率	52.1%
数-No.4	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

ある商店で、商品Aを1個50円、商品Bを1個10円で販売を開始し、この2品目の初日の売り上げは合計で5,800円であった。2日目に商品Aを10円値下げしたところ、商品Aの販売数量は10個増え、この2品目の売り上げは合計で5,000円であった。2日目の商品Aの販売数量はどれか。ただし、商品Bの販売数量は、両日とも12個以上20個以下であったものとする。

1. 120個
2. 121個
3. 122個
4. 123個
5. 124個

第1回	文章題					都：2008年	正答率	41.3%
数-No.5	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	C	

ある果物店で、もも、りんご及びなしの3商品を、ももを1個300円、りんごを1個200円、なしを1個100円で販売したところ、3商品の販売総数は200個、3商品の売上総額は36,000円であった。りんごの販売個数が100個未満であり、なしの売上金額が3商品の売上総額の2割未満であったとき、ももの売上金額として、正しいのはどれか。

1. 9,300円
2. 9,600円
3. 9,900円
4. 10,200円
5. 10,500円

第1回	文章題					都：2009年	正答率	51.0%
数-No.6	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

ある会社が、新入社員の歓迎会を企画し、円卓の数が一定である会場において、出席者を円卓の周りに座らせる方法について検討したところ、次のA～Cのことが分かった。

- A 1脚の円卓に8席ずつ用意すると、席が42人分余る。
- B 1脚の円卓に6席ずつ用意すると、席が足りず、不足する席は25人分より多い。
- C 半数の円卓にそれぞれ8席ずつ用意し、残った円卓にそれぞれ6席ずつ用意すると、席は余り、余る席は7人分より多い。

以上から判断して、出席者の数として、正しいのはどれか。

- 1. 214人
- 2. 222人
- 3. 230人
- 4. 238人
- 5. 246人

第1回	文章題					裁：2008年	正答率	92.6%
数-No.7	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

ある区間の運賃が子供7人と大人2人では4,100円で、子供20人と大人3人で9150円である。ただし、子供は10人以上になると、1人あたりの運賃が1割引になる。この場合、この区間の大人1人の運賃は次のどれか。

- 1. 500円
- 2. 550円
- 3. 600円
- 4. 650円
- 5. 700円

第1回	文章題					裁：2020年	正答率	68.0%
数-No.8	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /		頻出度	A

ある店では、2種類のノートA、Bを売っている。Aは1冊100円、Bは1冊150円である。先月はBの売上額がAの売上額より22,000円多かった。また今月の売上冊数は先月に比べて、Aは3割減ったがBは4割増えたので、AとBの売上冊数の合計は2割増えた。

このとき、今月のAの売上冊数として正しいのはどれか。なお、消費税については考えないものとする。

1. 50冊
2. 56冊
3. 64冊
4. 72冊
5. 80冊

第1回	文章題					国般：2018年	正答率	56.0%
数-No.9	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /		頻出度	A

箱の中に何本かの缶ジュースがあり、A～Eの5人で分けた。次のことが分かっているとき、DとEに分けられた缶ジュースの本数の合計は何本か。

- AとBに分けられた缶ジュースの本数の合計は、分ける前の本数の $\frac{7}{18}$ である。
- AとCに分けられた缶ジュースの本数の合計は、分ける前の本数の $\frac{4}{9}$ である。
- BとCに分けられた缶ジュースの本数の合計は、分ける前の本数の $\frac{1}{3}$ である。
- Aが自分に分けられた缶ジュースをBに4本渡したところ、AとBの缶ジュースの本数は等しくなった。

1. 26本
2. 28本
3. 30本
4. 32本
5. 34本

第1回	文章題					区(経験者): 2019年	正答率	-%
数-No. 10	1: /	2: /	3: /	4: /	5: /	頻出度	B	

1個当たり400円の利益を見込んで定価を設定した商品がある。この商品を定価の10%引きの価格で10個売ったときの利益と定価の25%引きの価格で20個売ったときの利益が一致した。この商品1個当たりの定価はどれか。

1. 600円
2. 1,000円
3. 1,200円
4. 1,400円
5. 1,600円

第1回	文章題					国般: 2010年	正答率	42.0%
数-No. 11	1: /	2: /	3: /	4: /	5: /	頻出度	B	

ある商品を120個仕入れ、原価に対し5割の利益を上乗せして定価とし、販売を始めた。ちょうど半数が売れた時点で、売れ残りが生じると思われたので、定価の1割引きにして販売した。販売終了時刻が近づき、それでも売れ残りそうであったので、最後は定価の半額にして販売したところ、売り切れた。全体としては、原価に対し1割5分の利益を得た。このとき、定価の1割引きで売れた商品は何個か。

1. 5個
2. 15個
3. 25個
4. 45個
5. 55個

第1回	文章題					国般: 2019年	正答率	56.0%
数-No. 12	1: /	2: /	3: /	4: /	5: /	頻出度	A	

ある学校において、A、Bの二つの組が、それぞれジュースとお茶の2種類の飲み物を用意してパーティーを開催した。A組では、パーティー終了後、ジュースは全てなくなり、お茶は用意した量の $\frac{4}{5}$ が残っていた。B組では、ジュースについてはA組と同じ量を、お茶についてはA組の $\frac{2}{3}$ の量を用意したところ、パーティー終了後、ジュースは全てなくなり、お茶は用意した量の $\frac{1}{10}$ が残っていた。B組において消費された飲み物の量はA組のその $\frac{9}{8}$ であった。

このとき、A組において、用意した飲み物全体に占めるお茶の割合はいくらか。

1. 15%
2. 20%
3. 25%
4. 30%
5. 35%

第1回	文章題					裁：2016年	正答率	50.1%
数-No. 13	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

ある高校の入学試験において、受験者数の男女比は15：8、合格者数の男女比は10：7、不合格者数の男女比は2：1であった。男子の合格者数と男子の不合格者数の比として、適当なものはどれか。

1. 5：1
2. 3：2
3. 2：3
4. 2：5
5. 1：5

第1回	文章題					税・財・労：2013年	正答率	80.6%
数-No. 14	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

A～Dの4人が、100点満点の試験を受けた。4人の得点について、次のことが分かっているとき、Aの得点とBの得点を足し合わせた得点はどれか。ただし、試験の得点は全て整数とし、0点の者はいないものとする。

- Aの得点は、Bの得点の $\frac{5}{7}$ 倍であった。
- Bの得点は、Cの得点の $\frac{5}{3}$ 倍であった。
- Cの得点は、Dの得点の2倍であった。

1. 36点
2. 60点
3. 96点
4. 120点
5. 144点

第1回	文章題					税・財・労：2021年	正答率	69.0%
数-No. 15	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

濃度の異なる2種類の食塩水A、Bがある。いま、AとBを1：2の割合で混ぜたところ濃度10%の食塩水ができ、AとBを2：1の割合で混ぜたところ濃度15%の食塩水ができた。このとき、Bの濃度はいくらか。

1. 5%
2. 10%
3. 15%
4. 20%
5. 25%

第1回	文章題					区：2003年	正答率	- %
数-No. 16	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

果汁10%のオレンジジュースがある。これに天然水を加え、果汁6%のオレンジジュースにした。次に、果汁4%のオレンジジュースを500g加えたところ、果汁5%のオレンジジュースになった。天然水を加える前のオレンジジュースは、何gあったか。

1. 210g 2. 240g 3. 270g 4. 300g 5. 330g

第1回	文章題					区：2017年	正答率	61.0%
数-No. 17	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

濃度7%の食塩水が入った容器Aと、濃度10%の食塩水が入った容器Bがある。今、容器A、Bからそれぞれ100gの食塩水を取り出して、相互に入れ替えをし、よくかき混ぜたところ、容器Aの濃度は9.4%になった。最初に容器Aに入っていた食塩水は何gか。

1. 125g 2. 150g 3. 175g 4. 200g 5. 225g

第1回	文章題					裁：2016年	正答率	74.0%
数-No. 18	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

濃度の異なる食塩水が、容器A、Bにそれぞれ600g、400g入っている。はじめに容器Aから容器Bへ食塩水200gを移し、よくかき混ぜた後に容器Bから容器Aへ食塩水200gを戻してよくかき混ぜたら、容器Aには濃度10%の食塩水ができた。その後、容器A、容器Bの食塩水を全てよく混ぜ合わせたら濃度8.4%の食塩水ができた。はじめに容器Aに入っていた食塩水の濃度はいくらか。

1. 11% 2. 12% 3. 13% 4. 14% 5. 15%

第1回	文章題					国般：2009年	正答率	67.0%
数-No. 19	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

ある容器に濃度20.0%のショ糖の水溶液が500 g 入っている。この水溶液の $\frac{3}{5}$ を赤いコップに移し、残りをすべて青いコップに入れた。赤いコップに、ショ糖を20 g 追加し、十分にかき混ぜて均一になったところで、赤いコップの水溶液の半分を青いコップに移した。最後に、青いコップへ水を40 g 追加した。このとき、青いコップに入っている水溶液の濃度はいくらか。

ただし、水溶液中のショ糖はすべて溶けているものとする。

1. 18.0%
2. 18.5%
3. 19.0%
4. 19.5%
5. 20.0%

第1回	文章題					裁：2021年	正答率	65.0%
数-No. 20	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

濃度 25%の食塩水 200g がある。この食塩水から何 g かを捨てて、同じ量の水を補った。さらに最初に捨てた食塩水の2倍を捨て、捨てた分だけ水を補ったところ、濃度が12%になった。このとき、最初に捨てた食塩水の量として正しいものはどれか。

1. 40g
2. 50g
3. 60g
4. 70g
5. 80g

第1回	文章題					区：2021年	正答率	51.0%
数-No. 21	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /		頻出度	A

ある学校でマラソン大会を実施した。今、生徒の完走時間について次のア～オのことが分かっているとき、完走時間が1時間以上の生徒は何人か。

- ア. 全生徒の完走時間の平均は、71分であった。
- イ. 完走時間が45分未満の生徒は20人おり、その完走時間の平均は43分であった。
- ウ. 完走時間が45分以上1時間未満の生徒は全体の40%であり、その完走時間の平均は54分であった。
- エ. 完走時間が1時間以上1時間30分未満の生徒の完走時間の平均は、75分であった。
- オ. 完走時間が1時間30分以上の生徒は全体の20%であり、その完走時間の平均は105分であった。

1. 100人
2. 160人
3. 220人
4. 280人
5. 340人

第1回	文章題					国般：2008年	正答率	53.1%
数-No. 22	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /		頻出度	B

あるクラスで数学のテストを実施したところ、クラス全員の平均点はちょうど63点で、最も得点の高かったAを除いた平均点は62.2点、最も得点の低かったBを除いた平均点は63.9点、AとBの得点差はちょうど68点であった。このクラスの数として正しいのはどれか。

1. 29人
2. 32人
3. 35人
4. 38人
5. 41人

第2回	速さ					区：2021年	正答率	68.0%
数-No. 23	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

Aは、いつも決まった時刻に家を出発し、家から駅まで12分かけて歩いて向かっている。ところがある日、家から駅までの道のりの3分の1の地点で忘れ物に気づいたので、すぐに走って家に戻り、忘れ物を取ってから再び走って駅へ向かったところ、駅に到着した時刻はいつもと同じだった。家に到着してから再び出発するまでにかかった時間はどれか。ただし、Aが走る速さは歩く速さの3倍で、それぞれの速さは一定とする。

1. 2分20秒
2. 2分30秒
3. 2分40秒
4. 2分50秒
5. 3分

第2回	速さ					国般：2008年	正答率	53.8%
数-No. 24	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

地点A, B, Cがあり、AB間は高速道路、AC間及びBC間は一般道路で結ばれ、いずれも直線の道路である。また、ACとBCは直交しており、AC間は8km、BC間は6kmであった。

ある人が自動車でAからCに行こうとしたところ、高速道路を走行してBを経由したため、最短の時間で到着できる時刻より遅れてCに着いた。自動車は高速道路を100km/hで、一般道路を40km/hで走るものとする、遅れた時間は何分か。

ただし、高速道路と一般道路の間の移動に要する時間は無視できるものとする。

1. 3分
2. 4分
3. 5分
4. 6分
5. 7分

第2回	速さ					国般：2005年	正答率	- %
数-No. 25	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

AとBは同一地点から30km先の目的地に向けて出発することにした。AはBより15分早く自転車で出発したが、移動の途中でバイクに乗ったBに追い越され、結局、AはBより目的地に10分遅れて到着することとなった。

Bのバイクの速さがAの自転車の速さの1.5倍であったとするとAの速さは時速何kmか。

ただし、二人とも同じ経路を終始一定の速さで走り続けたものとする。

1. 時速 12km
2. 時速 16km
3. 時速 20km
4. 時速 24km
5. 時速 28km

第2回	速さ					区：2014年	正答率	41.0%
数-No. 26	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	A	

A～Cの3人が、スタートから20km走ったところで折り返し、同じ道に戻ってゴールする40kmのロードレースを行った。今、レースの経過について、次のア～ウのことが分かっているとき、CがゴールしてからBがゴールするまでに要した時間はどれか。ただし、A～Cの3人は同時にスタートし、ゴールまでそれぞれ一定の速さで走ったものとする。

ア. Aは、16km走ったところでCとすれ違った。

イ. Bが8km走る間に、Cは24km走った。

ウ. AとBは、スタートから3時間20分後にすれ違った。

1. 5時間20分
2. 5時間40分
3. 6時間
4. 6時間20分
5. 6時間40分

第2回	速さ					国般：2020年	正答率	78.0%
数-No. 27	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

川の上流に地点 A，下流に地点 B があり，船がその間を往復している。船の先頭が，A を通過してから川を下って B を通過するまで25分かかり，また，船の先頭が，B を通過してから川を上って A を通過するまで30分かかる。このとき，静水時の船の速さと川の流れの速さの比はいくらか。

ただし，静水時の船の速さ及び川の流れの速さは一定であるものとする。

船 川

1. 10 : 1
2. 11 : 1
3. 12 : 1
4. 13 : 1
5. 14 : 1

第2回	速さ					区：2022年	正答率	42.0%
数-No. 28	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

ある川に沿ってサイクリングロードがあり，下流の地点 P から上流の地点 Q に向かって，自転車がサイクリングロードを，船が川を，同時に出発した。船は，途中でエンジンが停止してそのまま 15 分間川を流された後，再びエンジンが動き出し，最初に出発してから 60 分後に，自転車と同時に Q に到着した。このとき，静水時における船の速さはどれか。ただし，川の流れの速さは 4km/時，自転車の速さは 8km/時であり，川の流れ，自転車及び船の速さは一定とする。

1. 8km/時
2. 10km/時
3. 12km/時
4. 14km/時
5. 16km/時

第2回	速さ					裁：2018年	正答率	56.0%
数-No. 29	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

長さ50m、時速50kmで走行する列車Aが、並走する線路を後ろから走ってきた時速75kmの列車Bに追い越された。その際、列車Bの先頭が列車Aの最後尾に追いつき、列車Bの最後尾が列車Aの先頭を抜き去る瞬間までに14秒かかった。この2本の列車が反対方向からすれ違う場合、先頭どうしがすれ違う瞬間から最後尾どうしがすれ違う瞬間までに要する時間は何秒か。

1. 2.8秒
2. 2.9秒
3. 3.0秒
4. 3.1秒
5. 3.2秒

第2回	速さ					国般：2013年	正答率	39.1%
数-No. 30	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	C	

甲駅と乙駅を結ぶ道路を、Aは甲駅から乙駅に向かって、Bは乙駅から甲駅に向かって、それぞれ一定の速さで歩く。2人が同時に出発してから途中で出会うまでにかかる時間は、Aが甲駅を出発してから乙駅に到着するまでにかかる時間に比べると4分短く、Bが乙駅を出発してから甲駅に到着するまでにかかる時間に比べると9分短い。Bが乙駅を出発してから甲駅に到着するまでにかかる時間はいくらか。

1. 11分
2. 12分
3. 13分
4. 14分
5. 15分

第2回	速さ					国般：2012年	正答率	56.5%
数-No. 31	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

空^{から}の貯水槽がある。ホースA、B、Cを用いて、この貯水槽に水をためることができる。ホース二つを同時に用いる場合、AとBでは36分、BとCでは45分、AとCでは60分で貯水槽がいっぱいになる。

ホースA、B、Cの三つを同時に用いる場合には、この貯水槽をいっぱいにするのにかかる時間はいくらか。

1. 18分
2. 21分
3. 24分
4. 27分
5. 30分

第2回	速さ					国般：2000年	正答率	- %
数-No. 32	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

ある会議の資料をコピーするために、AとBの2台のコピー機をレンタルした。Aのコピー機だけを使用すると作業時間は4時間かかるが、AとBの2台を同時に使用すると、2時間40分になることが予想された。最初、Aのコピー機だけで作業したが、しばらくしてBのコピー機が加わって2台で作業を行った。ところが、途中でAのコピー機が故障したため、その後はBのコピー機のみを使用することになり、作業時間は全体で3時間20分となった。Aのコピー機のみで作業を行ったのが80分であったとき、Bのコピー機のみで作業を行った時間は何分であったか。

1. 20分
2. 24分
3. 28分
4. 32分
5. 36分

第2回	速さ					区：2016年	正答率	55.0%
数-No. 33	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

160Lの水が入る水槽を満水にするために、Aの蛇口だけで給水すると40分かかり、AとBの2つの蛇口で同時に給水すると16分かかる。今、AとBの2つの蛇口で同時に給水しているとき、水槽の栓が外れたため毎分8Lの水が流出し、満水になるのが30分遅れた。水槽の栓が外れたのは給水を始めてから何分後か。

1. 8.0分後
2. 8.5分後
3. 9.0分後
4. 9.5分後
5. 10.0分後

第2回	速さ					区(経験者)：2020年	正答率	- %
数-No. 34	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

ある印刷作業を4時間で終わるのに、印刷機Aだけを動かすと5台、印刷機Bだけを動かすと10台必要になる。今、同じ印刷作業を1時間で終わるために印刷機Aを8台と印刷機Bの何台かを同時に動かすとき、最低でも必要となる印刷機Bの台数はどれか。

1. 12台
2. 16台
3. 20台
4. 24台
5. 28台

第2回	速さ					区：2005年	正答率	- %
数-No. 35	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

A, Bの2名で倉庫整理を行うと、ある日数で終了することが分かっている。整理をAだけで行くと2名で行うときの日数より4日多くかかり、Bだけで行くと16日多くかかる。このとき、Bだけで整理を行った場合に要する日数はどれか。ただし、A, Bそれぞれの1日当たりの仕事量は一定とする。

1. 18日 2. 20日 3. 22日 4. 24日 5. 26日

第2回	速さ					区：2013年	正答率	72.9%
数-No. 36	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

映画館でチケットを売り始めたとき、既に行列ができており、発売開始後も毎分10人ずつ新たに行列に加わるものとする。窓口が1つのときは1時間で行列がなくなり、窓口が3つのときは15分で行列がなくなる。チケットを売り始めたときに並んでいた人数はどれか。ただし、どの窓口も1分間に同じ枚数を売るものとする。

1. 1200人 2. 1300人 3. 1400人 4. 1500人 5. 1600人

第2回	速さ					区：2005年	正答率	- %
数-No. 37	1： /	2： /	3： /	4： /	5： /	頻出度	B	

ある博物館の開館時刻は午前9時であり、開館時刻には、既に博物館前に何人かが並んで開館を待っている。入館待ちの行列は、博物館の入口を5つにすると開館時刻の40分後に、入口を4つにすると開館時刻の55分後になくなるという。このとき、入口を3つにした場合の行列がなくなる時刻に最も近いのはどれか。ただし、来館者は開館後も一定のペースでやってきており、また、すべての入口において入館していくペースは同一であるものとする。

1. 午前10時10分
2. 午前10時20分
3. 午前10時30分
4. 午前10時40分
5. 午前10時50分

正答番号一覧 (数的処理 1~2回 〈数推①②〉)

問題 No.	正答番号	問題 No.	正答番号	問題 No.	正答番号
No. 1	2	No. 16	4	No. 31	5
No. 2	5	No. 17	1	No. 32	1
No. 3	1	No. 18	2	No. 33	2
No. 4	3	No. 19	5	No. 34	4
No. 5	1	No. 20	1	No. 35	4
No. 6	3	No. 21	3	No. 36	1
No. 7	4	No. 22	5	No. 37	3
No. 8	2	No. 23	3		
No. 9	3	No. 24	1		
No. 10	2	No. 25	4		
No. 11	1	No. 26	5		
No. 12	3	No. 27	2		
No. 13	5	No. 28	5		
No. 14	4	No. 29	1		
No. 15	1	No. 30	5		

※実際の問題集には、正答番号と共に選択肢ごとの詳細な解説を掲載しております。