

CFA 試験のための数学基礎

目 次

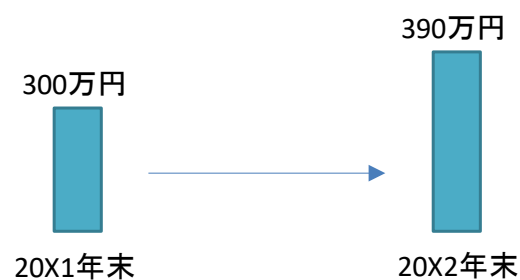
1. リターン	3
2. 年金と住宅ローン	16
3. 損益がちょうどゼロの状態	22
4. 統計と確率	49
5. サンプルデータ	52
6. 2つのバラツキ	54
7. 平均・分散・標準偏差と加減乗除	63
8. その他	65
付録：BA II Plus の設定	71

学習内容

金融分野でよく使われる基本的な計算の考え方や数字の扱い方について学習する。

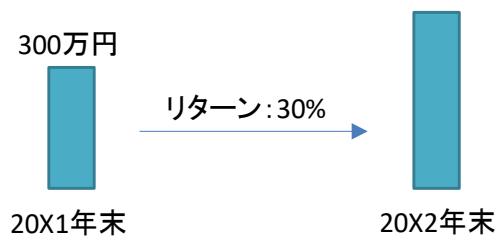
1. リターン

- 300 万円の資産が 1 年後 390 万円になった。これは、資産が 1 年で 1.3 倍になったということであり、1 年間のリターンが 30%であったということである（リターンは、資産がどれだけ増えたかを表す）。



- $390\text{万円} \div 300\text{万円} = 1.3$ 資産が1年で1.3倍になった。
- $\frac{390\text{万円}}{300\text{万円}} - 1 = 0.3$ 資産の1年間のリターンは30%。
 $\frac{390\text{万円} - 300\text{万円}}{300\text{万円}} = 0.3$ 資産の1年間のリターンは30%。

- 300 万円の資産の 1 年間のリターンが 30%であったということは、300 万円が 1 年後に 390 万円になったということである。



$$300\text{万円} \times (1 + 30\%) = 300\text{万円} \times 1.3 = 390\text{万円}$$

問

100 万円の資産のリターンが最初の 1 年も次の 1 年も 20%であった。2 年後の資産額は
いくらか。

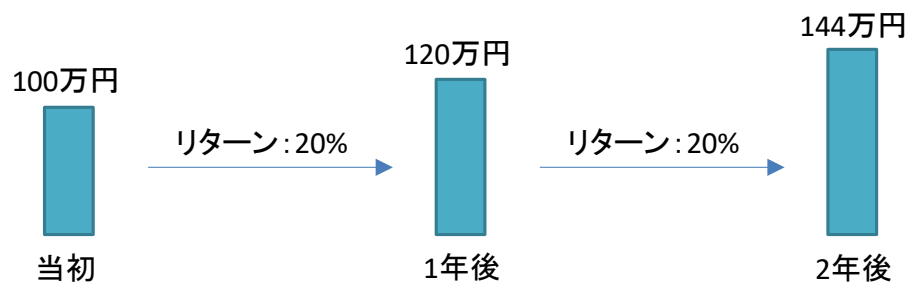
解答：144 万円

$100 \text{ 万円} \times (1 + 20\%) = 100 \text{ 万円} \times 1.2 = 120 \text{ 万円}$ （1 年後の資産額）

$120 \text{ 万円} \times (1 + 20\%) = 120 \text{ 万円} \times 1.2 = 144 \text{ 万円}$ （2 年後の資産額）

まとめると、

$100 \text{ 万円} \times (1 + 20\%) \times (1 + 20\%) = 100 \text{ 万円} \times 1.2 \times 1.2 = 100 \text{ 万円} \times 1.2^2$
 $= 144 \text{ 万円}$ （2 年後の資産額）



$$100\text{万円} \times (1 + 20\%) \times (1 + 20\%) = 100\text{万円} \times 1.2 \times 1.2 = 144\text{万円}$$

100 万円の資産が 2 年後に 144 万円になった。これは、資産が 2 年で 1.44 倍（ $144 \text{ 万円} \div 100 \text{ 万円} = 1.44$ ）になったことを意味する。

資産が2年で1.44倍になったことが先に分かっている、1年あたりのリターンを求める場合、まず、資産が1年あたり何倍になったか計算する。2年後の資産額を計算する際には1.2倍を2乗したが、「2年」で1.44倍になった資産が「1年あたり何倍」になっているかを計算する際には1.44を「 $\frac{1}{2}$ 乗」する。

$$(1.44)^{\frac{1}{2}} = 1.2$$

資産が1年あたり1.2倍ということは、1年あたりのリターンは20%である。

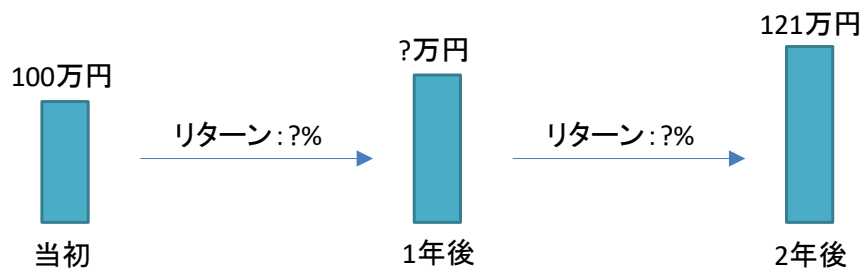
$$(1.44)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1.2 - 1 = 0.2$$

参考：電卓による計算手順（□は電卓のボタン）

1.44 $\sqrt{x}$ (1 $\div$ 2) $\square$ $\square$ 1 $=$

問

100 万円の資産が 2 年後に 1.21 倍になった。リターンは、最初の 1 年も次の 1 年も同じ水準であった。各年のリターンは何%であったか。



解答：10%

資産が2年で1.21倍（121万円÷100万円＝1.21）になったということは、資産が1年あたり1.1倍ということである。資産が1年あたり1.1倍ということは、1年あたりのリターンは10%である。

$$(1.21)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1.1 - 1 = 0.1$$

参考：電卓による計算手順（□は電卓のボタン）

1.21 $\sqrt{x}$ (1 $\div$ 2) $-$ 1 $=$

問

- ①100 万円の資産のリターンが最初の 1 年は 10%、次の 1 年は 30%であった。2 年後の資産額はいくらか。
- ②100 万円の資産のリターンが最初の 1 年は 30%、次の 1 年は 10%であった。2 年後の資産額はいくらか。
- ③2 年後の資産額は①と同じであった。リターンの水準は、最初の 1 年も次の 1 年も同じであった。各年のリターンは何%であったか。

解答：

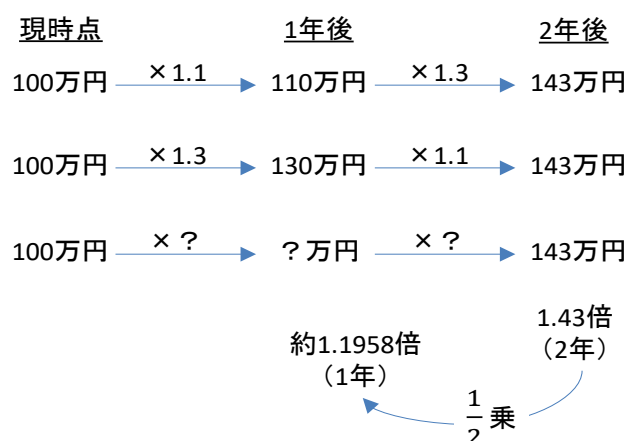
①143 万円

$100 \text{ 万円} \times (1 + 10\%) \times (1 + 30\%) = 100 \text{ 万円} \times 1.1 \times 1.3 = 143 \text{ 万円}$ (2 年後の資産額)

②143 万円

$100 \text{ 万円} \times (1 + 30\%) \times (1 + 10\%) = 100 \text{ 万円} \times 1.3 \times 1.1 = 143 \text{ 万円}$ (2 年後の資産額)

1 年目と 2 年目のリターンの順番が入れ替わっても、2 年後の資産額は同じである。



③19.58%

資産が 2 年で 1.43 倍 (143 万円 ÷ 100 万円 = 1.43) になったということは、資産が 1 年あたり 1.1958 倍ということである。資産が 1 年あたり 1.1958 倍ということは、1 年あたりのリターンは 19.58%である。

$$(143 \div 100)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.1958$$

参考：電卓による計算手順 (□は電卓のボタン)

□ 143 □ ÷ □ 100 □) y^x □ (1 □ ÷ □ 2 □) □ - 1 □ =

2 年後の資産額が①と同じであることを確認

$$100 \text{ 万円} \times (1 + 19.58\%) \times (1 + 19.58\%) = 100 \text{ 万円} \times 1.1958^2 = 143 \text{ 万円}$$

③のようにして計算したリターン (19.58%) は、①や② (10%と 30%) の幾何平均 (geometric mean) とよばれる。

問

- ①100 万円の資産のリターンが最初の 1 年は 10%、次の 1 年は 30%、その次の 1 年は 5%であった。3 年後の資産額はいくらか。
- ②3 年後の資産額は①と同じであった。リターンの水準は、最初の 1 年も次の 1 年も、その次の 1 年も同じ水準であった。各年のリターンは何%であったか。（＝①の 1 年あたりの幾何平均リターンは何%か）。

解答：

①150 万 1500 円

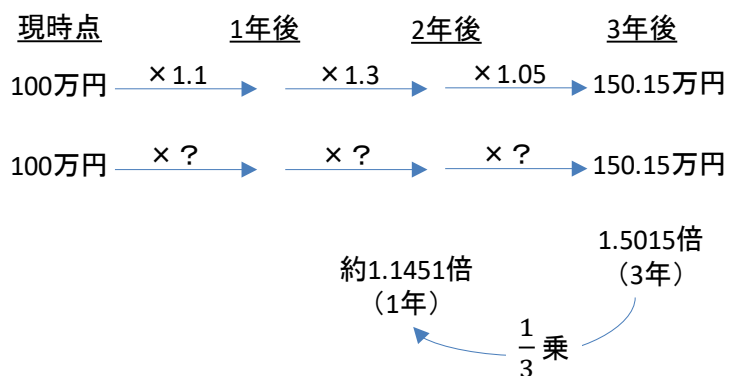
$$100 \text{ 万円} \times (1+10\%) \times (1+30\%) \times (1+5\%) = 100 \text{ 万円} \times 1.1 \times 1.3 \times 1.05 = 150 \text{ 万 } 1500 \text{ 円} \quad (3 \text{ 年後の資産額})$$

②14.51%

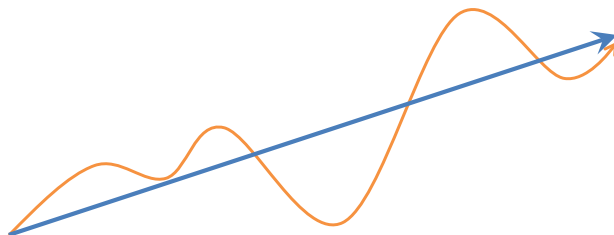
資産が 3年で 1.5015倍 ($150 \text{ 万 } 1500 \text{ 円} \div 100 \text{ 万円} = 1.5015$) になっている。「3年」で 1.5015 倍になった資産が「1年あたり何倍」になったかを計算する際には 1.5015 を「 $\frac{1}{3}$ 乗」する。計算すると、資産が 1年あたり 1.1451倍 であるため、1年あたりのリターンは 14.51% である。

$$(150.15 \div 100)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0.1451$$

参考：電卓による計算手順（□は電卓のボタン）

$$\left(150.15 \div 100 \right) y^x \left(1 \div 3 \right) - 1 =$$


幾何平均リターンは、途中の入出金がなければ「最初」の金額と「最後」の金額と「期間」で決まる。



問

- ①100 万円の資産の価値が、1 年後に 120 万円になり、2 年後に 100 万円、3 年後に 130 万円、4 年後に 150 万円、5 年後に 100 万円になった。1 年あたりの幾何平均リターンは何%か。
- ②100 万円の資産のリターンが最初の 1 年は 10%、次の 1 年は－10%であった。1 年あたりの幾何平均リターンは何%か。

解答：

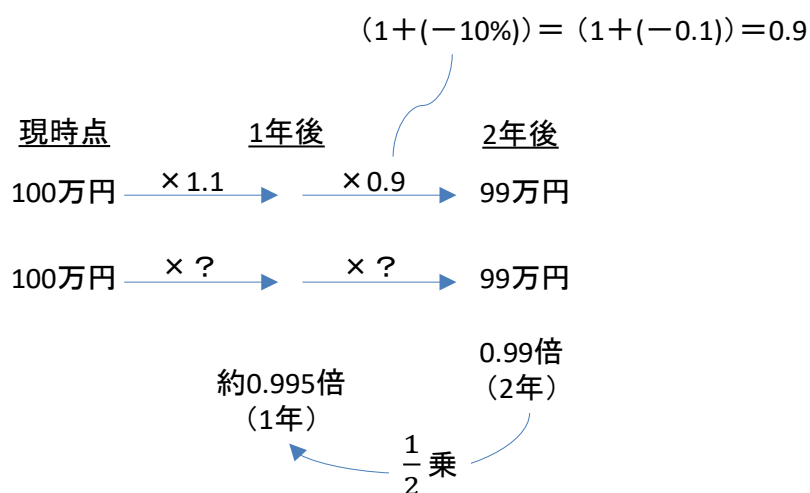
①0%

$$(100 \div 100)^{\frac{1}{5}} - 1 = 0$$

②-0.5%

100 万円 $\times (1 + 10\%) \times (1 - 10\%) = 100 \text{ 万円} \times 1.1 \times 0.9 = 99 \text{ 万円}$ (2 年後の資産額)

$$(99 \div 100)^{\frac{1}{2}} - 1 = -0.0050$$



各年のデータを加算して、そのデータ数で割ったものは、算術平均 (arithmetic mean) とよばれる。②の算術平均リターンは「 $\{10\% + (-10\%)\} \div 2 = 0$ 」。