

第1章

証券分析とポートフォリオ・ マネジメントの基礎

この章のポイント

この章では、投資分析の基礎となる数学知識を学びます。具体的には、

- ・ 投資収益率の計算
- ・ 平均、分散、標準偏差、共分散、相関係数
- ・ 正規分布
- ・ 貨幣の時間価値

等について学びます。

1 投資収益率の基礎

☆☆☆

1 投資収益率の計算

(1) 投資収益率とは？

証券分析では、投資もしくは資金運用による収益（リターン）を測定する尺度として、主に投資収益率を使う。1 期間にわたり投資した場合の投資収益率は、投資額に対する収益の割合であり、次のように表される。

$$\text{投資収益率} = \frac{\text{収益}}{\text{投資額}}$$

たとえば、投資対象として株式を考えたとき、株式の購入価格が投資額であり、売却価格から購入価格を差し引いたものと株式保有期間中に支払われた配当の合計が収益となる。

いま、ある時点（第 0 時点）と次の時点（第 1 時点）の株価が、それぞれ、 P_0 円と P_1 円であり、第 1 時点に受け取る配当が D_1 円であったとき、第 1 時点における投資収益率 R は、次のように表される。

$$\begin{aligned} R &= \frac{\overbrace{(P_1 - P_0)}^{\text{キャピタル・ゲイン (または、ロス)}} + \overbrace{D_1}^{\text{インカム・ゲイン}}}{P_0} \quad [1.1.1] \\ &= \frac{P_1 + D_1}{P_0} - 1 \\ 1 + R &= \frac{P_1 + D_1}{P_0} \end{aligned}$$

● QUESTION

A 社株式を昨年 1 株 40 万円で買い、ちょうど 1 年後の現在、5,000 円の配当を受けた後に 48 万円で売却したとする。このときの A 社株の投資収益率（%）を求めなさい。

● ANSWER

$$\begin{aligned} \text{投資収益率} &= \frac{(\text{現在の株価} - \text{前期 (1 年前) の株価}) + \text{配当}}{\text{前期の株価}} \\ &= \frac{(480,000 \text{ 円} - 400,000 \text{ 円}) + 5,000 \text{ 円}}{400,000 \text{ 円}} \\ &= 0.2125 \end{aligned}$$

この計算より、年間でみた投資収益率は 21.25% となる。

(2) 算術平均と幾何平均

投資収益率の特徴を捉えるための基本的な方法は、多期間にわたる投資収益率の平均を求めることである。代表的な平均の計算方法には、**算術平均**と**幾何平均**とがある。

いま、 n 期間にわたって投資収益率 $R_1, \dots, R_n$ が観測されたとする。このとき、算術平均 $\bar{R}_a$ と幾何平均 $\bar{R}_g$ とは、それぞれ、次のように表される。

1. 算術平均

$$\bar{R}_a = \frac{1}{n} (R_1 + \dots + R_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i = \frac{\text{収益率の合計}}{\text{データ数}} \quad [1.1.2]$$

2. 幾何平均

$$\bar{R}_g = \{ (1+R_1) \times \dots \times (1+R_n) \}^{\frac{1}{n}} - 1 = \left\{ \prod_{i=1}^n (1+R_i) \right\}^{\frac{1}{n}} - 1 \quad [1.1.3]$$

算術平均と幾何平均の計算を具体的に確かめる。

次の表 1.1 は、2020 年のトヨタ自動車株の月次投資収益率を示している。

表 1.1 トヨタ自動車株の株式投資収益率（%、2020 年）

1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月
-0.8	-6.9	-7.1	2.5	1.3	0.1
7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
-8.1	12.7	0.4	-1.9	2.9	13.7

表 1.1 の月次投資収益率をもとにして、2020 年のトヨタ自動車株の平均投資収益率（月率）を、算術平均 $\bar{R}_{a, \text{トヨタ}}$ と幾何平均 $\bar{R}_{g, \text{トヨタ}}$ とについてみると、次ページのようになる。

① 算術平均

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{a,トヨタ} &= \frac{1}{12} \{ (-0.008) + (-0.069) + (-0.071) + 0.025 + 0.013 + 0.001 \\
 &\quad + (-0.081) + 0.127 + 0.004 + (-0.019) + 0.029 + 0.137 \} \\
 &= \frac{0.088}{12} \\
 &= 0.00733... \doteq 0.007
 \end{aligned}$$

これより、2020年のトヨタ自動車株の算術平均投資収益率は、0.7%であったことがわかる。

② 幾何平均

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{g,トヨタ} &= \{ (1-0.008) \times (1-0.069) \times (1-0.071) \times (1+0.025) \times (1+0.013) \\
 &\quad \times (1+0.001) \times (1-0.081) \times (1+0.127) \times (1+0.004) \times (1-0.019) \\
 &\quad \times (1+0.029) \times (1+0.137) \}^{\frac{1}{12}} - 1 \\
 &= (1.064...)^{\frac{1}{12}} - 1 \\
 &= 0.00520... \doteq 0.005
 \end{aligned}$$

これより、2020年のトヨタ自動車株の幾何平均投資収益率は、0.5%であったことがわかる（なお、最後の $\frac{1}{12}$ 乗は、一般の電卓では計算できない。ここでは計算処理の方法について確認しておく）。

●QUESTION

X 社のここ 4 年間の株式投資収益率は、表 1.2 のようであった。この表をもとにして、1 年あたりの平均投資収益率を、算術平均と幾何平均によって、それぞれ求めなさい。

表 1.2 X 社の年間投資収益率 (%)

1 年	2 年	3 年	4 年
20.0	-10.0	5.0	25.0

●ANSWER

1. 算術平均

$$\begin{aligned}\bar{R}_{a,X} &= \frac{1}{4} \{0.200 + (-0.100) + 0.050 + 0.250\} \\ &= \frac{0.400}{4} = 0.100\end{aligned}$$

これより、X 社のここ 4 年間の 1 年あたり算術平均投資収益率は、10.0%であることがわかる。

2. 幾何平均

$$\begin{aligned}\bar{R}_{g,X} &= \{(1+0.200) \times (1-0.100) \times (1+0.050) \times (1+0.250)\}^{\frac{1}{4}} - 1 \\ &= (1.4175)^{\frac{1}{4}} - 1 \\ &\doteq 0.091\end{aligned}$$

これより、X 社のここ 4 年間の 1 年あたり幾何平均投資収益率は、9.1%であることがわかる。

※ なお、 $(1.4175)^{\frac{1}{4}}$ の計算を通常の電卓で行うには、1.4175 と入力された状態で、ルートキーを 2 回押せばよい。

また、3 乗根のように $\frac{1}{2^n}$ 乗でないものは関数電卓でなければ解が計算できない。

1 次レベルの解答形式は選択式なので、通常の電卓の場合は選択肢から逆算する方法がとれる。

過去のリターンデータが得られたとき、算術平均リターンと幾何平均リターンとはどのように使い分けるべきか？

例えば、過去2年間のリターンは、1年目は100%、2年目は-50%であったとする。このとき、

$$\text{算術平均リターン} = \frac{100\% + (-50\%)}{2} = 25\%$$

$$\text{幾何平均リターン} = \sqrt{(1+1) \times (1-0.5)} - 1 = 0\%$$

となっている。

過去2年間にわたってこのリターンで運用した場合、最初の1年間で投資額の2倍になったものの2年目にその半分になれば、結局2年間では元に戻っただけである。このように過去の実績を把握する場合には、幾何平均リターンの方が状況を的確に捉えることができる。

これに対し、将来のリターンの予測はどうか？もし将来のリターンの分布が過去のリターンの分布と変わらないのであれば、次の1年間の期待リターンは100%と-50%の間と考えた方がよさそうである。つまり、将来の予測をする場合には、算術平均リターンの方がよさそうである。統計的により厳密に言えば、将来の期待リターンは算術平均リターンの最尤推定量（もっとも確からしい推定量）であることが知られているため、将来の予測には、算術平均リターンの方が優れている。

以上をまとめると、

将来の期待リターンの推定……過去のリターンの算術平均リターン

過去の実績リターンの把握……過去のリターンの幾何平均リターン
を用いるべきである。

2 不確実性と投資収益率

ここまでは、投資収益率として、実際に実現した値を対象としてきた。そこでは、

$$\text{投資収益率} = \frac{\text{収益}}{\text{投資額}}$$

において、投資額も収益も、ともに既に実現した値であった。

しかし、投資家がこれから投資をしようとする場合に、いま行おうとしている投資がどれだけの収益をもたらすかについては別途考慮が必要になる。というのは、投資対象には、**無リスク資産**（または、**安全資産**）の他に**リスク資産**があるからである。無リスク資産とは、投資時点で投資収益率が確定している資産のことであり、そのときの投資収益率を無リスク利子率あるいは安全資産利子率、リスクフリー・レート（risk free rate）などと呼ぶ。このタイプの資産については、これまで考えてきた議論がそのまま適用できる。これに対して、リスク資産とは、投資時点で投資収益率が確定していない資産のことであり、投資家は、リスク資産に投資を行う際、将来得られるであろう収益を予想する必要がある。ポートフォリオ理論のポイントは、この将来得られる収益を**確率変数**とみることにある。将来得られる収益を確率変数と考えたとき、それから求められる投資収益率も確率変数となる。

(1) 確率変数と確率分布

確率変数とは、いろいろな値をいろいろな確率でとるような変数である。

では、投資収益率が確率変数であるという意味を、あるリスク資産の投資収益率（または、収益）をひとつの例として考える。

この例で考える証券の投資収益率は、景気の影響を受けやすいものとし、将来の時点での景気の状態とその状態が起こる確率、およびその景気の状態のもとで予想される投資収益率が表 1.3 のようであったとする。

表 1.3 A 社の投資収益率の確率分布

景気状態	好況	平常	不況
確 率	0.3	0.5	0.2
収益率（％）の実現値	40	10	−30

この表は、ここで考えている A 社の収益率が、とりうる値（**実現値**）として 40%、10%、−30%のいずれかであり、それぞれの値の実現する確率が、0.3、0.5、0.2 であることを示している。このように、とりうる値とその値が実現する確率とが対応付けられた変数を**確率変数**といい、その対応関係は**確率分布**と呼ばれる。ある確率変数の特徴を捉えるということは、確率分布のもつ特徴を捉えることである。そのための最

も基本的な統計量として、**期待値**と**分散**（または、**標準偏差**）がある。期待値はその分布の**中心的な位置**を示し、分散（または、標準偏差）はその分布の**チラバリ具合**を示す。ポートフォリオ理論では、この期待値と分散（または、標準偏差）によって、確率変数とみなした将来の収益率の特徴を捉えることとなる。そこでは、将来の収益率の期待値を証券の**リターン**の尺度として使い、将来の収益率の分散（または、標準偏差）を証券の**リスク**の尺度として用いる。

(2) 期待値と分散・標準偏差

① 期待値（期待収益率）

証券*i*の収益率 R_i （確率変数）の期待値 $E[R_i]$ は、次のように定義される。

$$E[R_i] = p_1 r_{i,1} + \cdots + p_n r_{i,n} = \sum_{t=1}^n p_t r_{i,t} \quad [1.1.4]$$

＝（確率×実現値）の合計

ただし、

n : 実現しうる状態の数

p_t : 第 t 番目の状態が実現する確率（ $t=1, 2, \cdots, n$ ）

$r_{i,t}$: 第 t 番目の状態が実現したときの証券 i の投資収益率

このような収益率の期待値は**期待収益率**と呼ばれる。

この定義により、表 1.3 で A 社の収益率 R_A の期待値を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} E(R_A) &= 0.3 \times 40 + 0.5 \times 10 + 0.2 \times (-30) \\ &= 11(\%) \end{aligned}$$

これより、A 社の期待収益率（リターン）は 11% となることがわかる。

② 分散と標準偏差

確率変数とみなした個別証券*i*の収益率 R_i の分散 σ_i^2 は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= p_1 (r_{i,1} - E[R_i])^2 + \cdots + p_n (r_{i,n} - E[R_i])^2 \quad [1.1.5] \\ &= \sum_{t=1}^n p_t \{r_{i,t} - E[R_i]\}^2 \quad = \text{（確率} \times \text{偏差の 2 乗）の合計} \\ &= E[(R_i - E[R_i])^2] \quad = \text{偏差の 2 乗の期待値} \end{aligned}$$

[1.1.5] 式は次のようにも表せる（巻末付録 1 3.基本統計量 (2)分散 参照）。

$$\sigma_i^2 = E[R_i^2] - (E[R_i])^2 \quad [1.1.5']$$

さらに、標準偏差 σ_i は、分散の（正の）平方根として、次のように定義される。

$$\begin{aligned}
 \sigma_i &= \sqrt{\sigma_i^2} \\
 &= \sqrt{p_1 (r_{i,1} - E[R_i])^2 + \dots + p_n (r_{i,n} - E[R_i])^2} \\
 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i \{r_{i,i} - E[R_i]\}^2}
 \end{aligned}
 \tag{1.1.6}$$

これらの定義により、表 1.3 で示されている A 社の収益率の分散 σ_A^2 を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_A^2 &= 0.3 \times (40 - 11)^2 + 0.5 \times (10 - 11)^2 + 0.2 \times (-30 - 11)^2 \\
 &= 589(\%)^2
 \end{aligned}$$

これより、A 社の分散で測ったリスクは 589(%²)となる。さらに、標準偏差 σ_A を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \sigma_A &= \sqrt{589} \\
 &\doteq 24.3(\%)
 \end{aligned}$$

これより、A の標準偏差で測ったリスクは 24.3%となる。

●QUESTION

表 1.4 には、B 社の将来の収益率 R_B の確率分布が示されている。この表をもとにして、B 社の期待収益率 $E[R_B]$ と収益率の分散 σ_B^2 および標準偏差 σ_B を求めなさい。

表 1.4 B 社の収益率の確率分布

景気状態	好況	平常	不況
確 率	0.3	0.5	0.2
予想される収益率 (%)	0	20	-15

●ANSWER

1. 期待収益率

$$\begin{aligned}
 E[R_B] &= 0.3 \times 0 + 0.5 \times 20 + 0.2 \times (-15) \\
 &= 7(\%)
 \end{aligned}$$

これより、B 社の期待収益率は 7%となる。

2. 収益率の分散

$$\begin{aligned}
 \sigma_B^2 &= 0.3 \times (0 - 7)^2 + 0.5 \times (20 - 7)^2 + 0.2 \times (-15 - 7)^2 \\
 &= 196(\%)^2
 \end{aligned}$$

これより、B 社の分散で測ったリスクは 196(%²)となる。

3. 収益率の標準偏差

$$\begin{aligned}\sigma_B &= \sqrt{\sigma_B^2} \\ &= \sqrt{196} \\ &= 14.0(\%) \end{aligned}$$

これより、B社の標準偏差で測ったリスクは14.0%となる。

一方、個別証券*i*の*n*期間の投資収益率の算術平均を $\bar{r}_i$ とすると、投資収益率の標準偏差は次のように定義される。

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \{r_{i,t} - \bar{r}_i\}^2} \quad [1.1.7]$$

5ページのQUESTION表1.2のデータを用いて標準偏差を求めると、

$$\begin{aligned}\sigma_X &= \sqrt{\frac{1}{4} \times \{(20-10)^2 + (-10-10)^2 + (5-10)^2 + (25-10)^2\}} \\ &= \sqrt{187.5} \\ &\doteq 13.7(\%) \end{aligned}$$

(3) 共分散と相関係数

いくつかの個別証券を組み合わせたものをポートフォリオという。ポートフォリオのリスクは、ポートフォリオの収益率の分散、または、標準偏差によって測られる。

ポートフォリオの収益率の散らばり具合である分散、または、標準偏差を測る場合には、それを構成する各銘柄の収益率の動きがどう関係しているかが重要になる。これを表す統計量として、**共分散**と**相関係数**を取りあげる。

① 共分散

証券1と証券2から構成されるポートフォリオの収益率の分散には、それらの証券の収益率間の共分散が関係している。共分散とは、2変数間の関係の度合を測る統計量のひとつである。証券1と証券2の収益率間の共分散 $Cov(R_1, R_2)$ は、次のように定義される。

$$\begin{aligned}
Cov(R_1, R_2) &= p_1(r_{1,1}-E[R_1])(r_{2,1}-E[R_2]) + \dots + p_n(r_{1,n}-E[R_1])(r_{2,n}-E[R_2]) \\
&= \sum_{i=1}^n p_i(r_{1,i}-E[R_1])(r_{2,i}-E[R_2]) \\
&= E[(R_1-E[R_1])(R_2-E[R_2])] \quad [1.1.8]
\end{aligned}$$

ただし、

n : 実現しうる状態の個数

$r_{1,i}$: 第 i 番目の状態が実現したときの証券 1 の収益率 ($i=1,2,\dots, n$)

$r_{2,i}$: 第 i 番目の状態が実現したときの証券 2 の収益率

p_i : 第 i 番目の状態が実現する確率

●QUESTION

前出の表 1.3 で示されている A 社の収益率の確率分布と表 1.4 で示されている B 社の収益率の確率分布をまとめると、

表 1.5 A 社、B 社の投資収益率の確率分布

景気状態	好況	平常	不況	期待値
確 率	0.3	0.5	0.2	
A 社の収益率 (%)	40	10	-30	11
B 社の収益率 (%)	0	20	-15	7

となる。これをもとに、A 社、B 社の収益率間の共分散 $Cov(R_A, R_B)$ を求めなさい。

●ANSWER

$$\begin{aligned}
Cov(R_A, R_B) &= 0.3 \times (40-11) \times (0-7) + 0.5 \times (10-11) \times (20-7) \\
&\quad + 0.2 \times (-30-11) \times (-15-7) \\
&= 113
\end{aligned}$$

これより、A 社と B 社の収益率間の共分散は 113 となる。

共分散は単位のとり方の影響を受ける。例えば、ある証券の収益率が 24.3%であったとき、収益率を 24.3 として計算するか、0.243 として計算するかで、共分散の値は大きく異なってくる。

上の例題で、A 社と B 社の収益率間の共分散 $Cov(R_A, R_B)$ を、収益率を小数で表して計算すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
Cov(R_A, R_B) &= 0.3 \times (0.40-0.11) \times (0-0.07) + 0.5 \times (0.10-0.11) \\
&\quad \times (0.2-0.07) + 0.2 \times (-0.30-0.11) \times (-0.15-0.07) \\
&= 0.0113
\end{aligned}$$

このとき、A社とB社の収益率間の共分散は0.0113となり、収益率を%表示で計算したときの共分散113より4ケタ小さくなっていることがわかる。共分散の計算では、それぞれの変数の変動の大きさの影響を受けてしまうので、その変動の大きさの影響を受けず2変数間の関係の強さを測る統計量として、次の相関係数を考える必要がある。

② 相関係数と散布図

確率変数とみなした証券1と証券2の収益率間の相関係数 ρ_{12} は、次のように定義される。

$$\rho_{12} = \frac{\text{Cov}(R_1, R_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{\text{共分散}}{\text{証券1の標準偏差} \times \text{証券2の標準偏差}} \quad [1.1.9]$$

●QUESTION

前出のA社とB社の収益率について、その統計的特性は

表 1.6 A社、B社の投資収益率に関する統計量

	期待値	標準偏差	共分散
A社の収益率 (%)	11	24.3	113
B社の収益率 (%)	7	14.0	

とまとめられる。これをもとに、A社、B社の収益率間の相関係数 ρ_{AB} を求めなさい。

●ANSWER

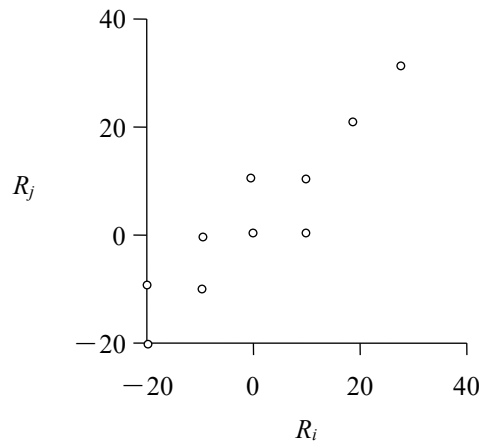
A社とB社の収益率間の相関係数は、

$$\begin{aligned} \rho_{AB} &= \frac{\text{Cov}(R_A, R_B)}{\sigma_A \sigma_B} \\ &= \frac{113}{24.3 \times 14.0} \\ &\doteq 0.33 \end{aligned}$$

このようにして求められる相関係数は、-1から1の間の値をとる。この相関係数が2変数間の関係をどのように測るかは、相関係数と散布図の関係をみるとわかりやすくなる。証券*i*と証券*j*の収益率間についての散布図とは、証券*i*の収益率を横軸に、証券*j*の収益率を縦軸にとった図に、実現した収益率の組合せをプロットしたものである。

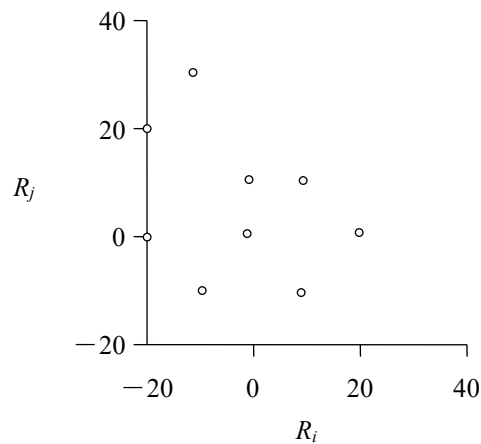
1) 正の相関があり、相関が強いもの。

相関係数 ρ_{ij} の値が正で、相関係数が 1 の方に近いとき、証券 i と証券 j の収益率間には、正の相関があり、さらに相関関係は強いという。このとき散布図は、図 1.1 のように、右上がりの直線のまわりに集まったような形状となる。

図 1.1 証券 i と j の収益率の散布図（正で強い相関の例）

2) 負の相関があり、相関が弱いもの。

相関係数 ρ_{ij} の値が負で、相関係数が 0 の方に近いとき、証券 i と証券 j の収益率間には、負の相関があり、さらに相関関係は弱いという。このとき散布図は、図 1.2 のように、右下がりの直線のまわりから散らばったような形状となる。

図 1.2 証券 i と j の収益率の散布図（負で弱い相関の例）

3) ほとんど相関がないもの。

相関関係がほぼ 0 に等しいとき、証券 i と証券 j の収益率間には、ほとんど相関がないという。このとき散布図は、図 1.3 のように、点が全体的に散らばったような形状となる。とくに、相関係数が 0 のとき、**無相関**という。

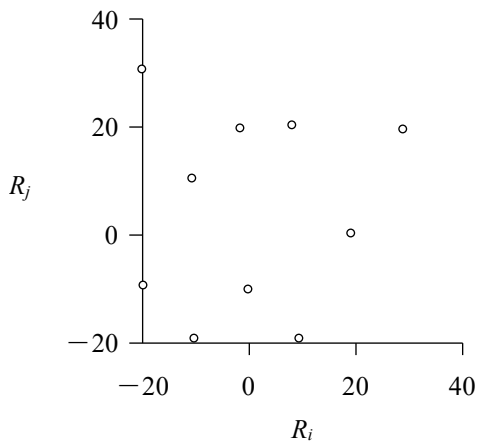
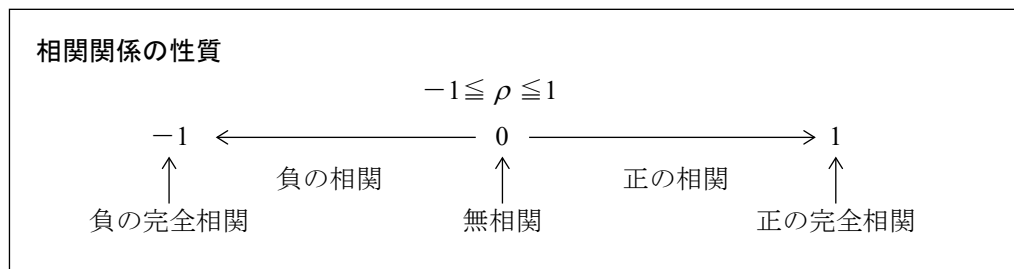


図 1.3 証券 i と j の収益率の散布図（ほとんど相関がない例）

これらの例が示すように、相関係数は、その符号で相関の正負を表し、その絶対値で相関の強さを表す。



3 収益率の分布—正規分布のケース—

将来の収益率を予想する場合、収益率の分布をどう考えるかが重要である。金融市場では、正規分布が仮定されるケースが多い。

収益率の確率分布として、正規分布が仮定されるのは、数学的に非常に扱いやすいことに加え、データ（ここでは、投資収益率）の確率分布が正規分布と異なる場合でも、十分なデータがある場合には、中心極限定理と呼ばれる性質により、正規分布による近似が正当化されるためである。

(1) 正規分布

正規分布は、平均を中心とする左右対称な釣鐘型をしており、平均と分散（もしくは、標準偏差）が与えられると、その分布型が特定される。

平均 μ 、分散 σ^2 の正規分布は $N(\mu, \sigma^2)$ と表し、ある確率変数 X が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき、

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

と表す。

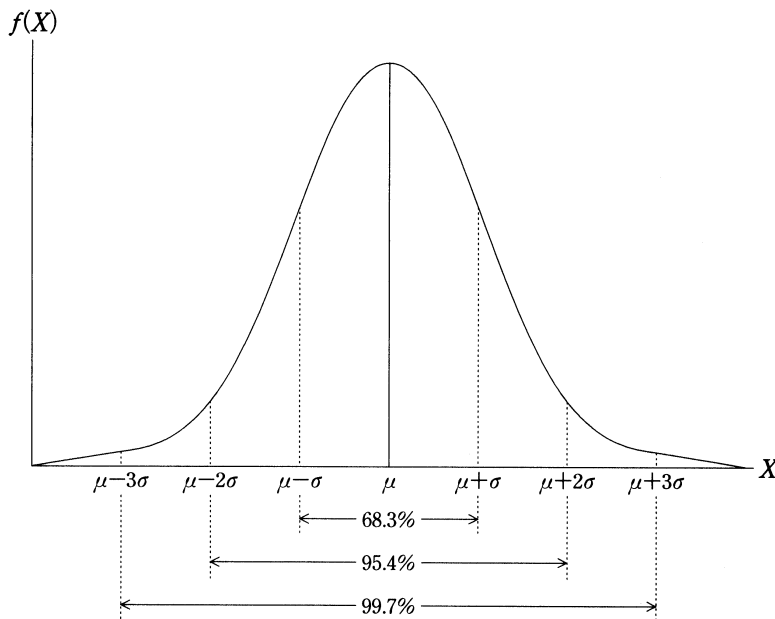


図 1.4 正規分布

正規分布は確率分布だから、その内部の面積は全体で 1.0 (=100.0%) であり、ある値からある値までの区間を区切り、その内部の面積を求めることにより、その範囲の値が起こりうる確率を計算することができる。図 1.4 では、平均値 $\mu \pm$ 標準偏差 σ の区間の面積が 0.683、 $\mu \pm 2\sigma$ の場合 0.954、 $\mu \pm 3\sigma$ の場合 0.997 となることを示し

ている。このことより、 X の実現値が平均 μ から σ 以上乖離する確率は $100\% - 68.3\% = 31.7\%$ 、 2σ 以上乖離する確率は $100\% - 95.4\% = 4.6\%$ 、 3σ 以上乖離する確率は $100\% - 99.7\% = 0.3\%$ となることがわかる。

このことは、 X の実現値が $\mu + 3\sigma$ 以上の大きな値となったり、 $\mu - 3\sigma$ 以下の小さな値となったりすることは、めったに起こらないと考えることができることを意味している。

(2) 標準正規分布

正規分布をもとにして、ある確率変数 X の実現値の起こりうる確率を求める簡単な方法として、確率変数を標準化し、「標準正規分布表」を利用するものがある。標準化は、次のような操作により行うことができる。

- ① 確率変数 X から平均 μ を引く： $X - \mu$
 - ② ①を標準偏差 σ で割る： $\frac{X - \mu}{\sigma}$
- $$\left. \begin{array}{l} \text{① 確率変数 } X \text{ から平均 } \mu \text{ を引く： } X - \mu \\ \text{② ①を標準偏差 } \sigma \text{ で割る： } \frac{X - \mu}{\sigma} \end{array} \right\} Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ とおく}$$

ある正規分布に従う確率変数 X を標準化して、新たに得られた確率変数 Z は、**標準正規分布**に従う。標準正規分布とは、平均値が0で、分散が1（標準偏差も1）の正規分布のことである。標準正規分布をもとにした確率は、「標準正規分布表」（巻末付録1）より簡単に求めることができる。また、表計算ソフトでも計算することができる。ちなみに、「標準正規分布表」を利用すると、確率変数 Z の実現値が -1 と 1 の間（ $\mu \pm \sigma$ に相当）となる確率が68.3%（図1.4参照）となることを確認することができる。

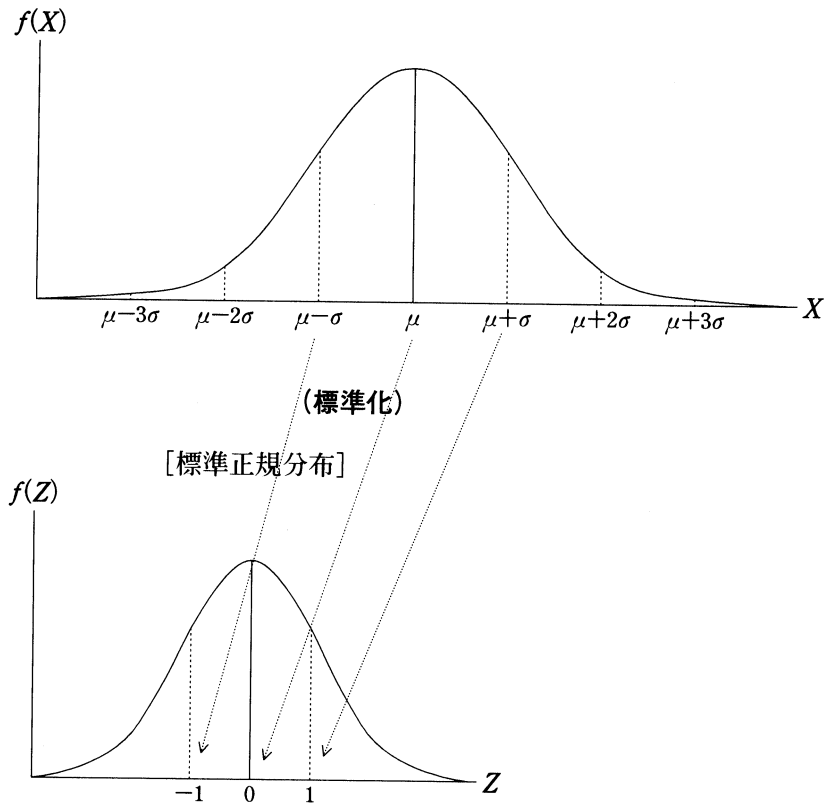


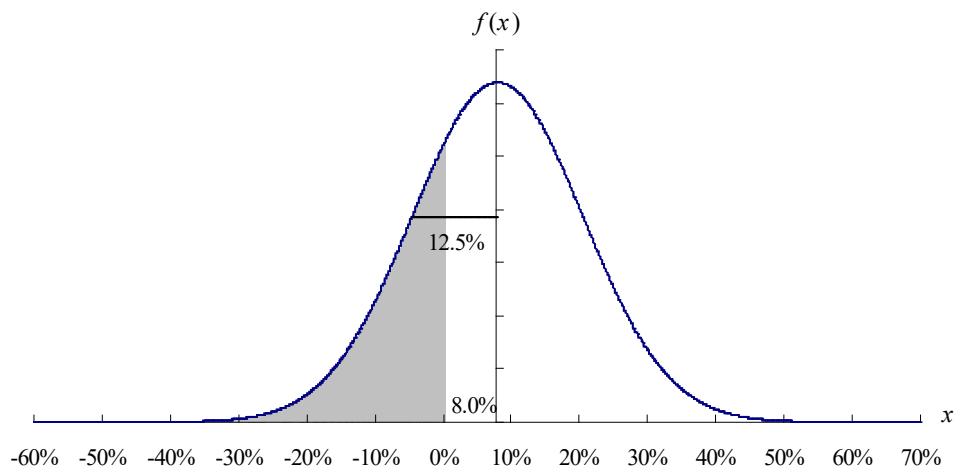
図 1.5 標準正規分布への標準化

●QUESTION

TOPIX 株価指数の平均収益率 (μ) が年率 8.0%、収益率の標準偏差 (σ) が年率 12.5%であるものとする。TOPIX の収益率 (x) が正規分布に従うとすると、1 年後の TOPIX の収益率がマイナスとなる確率を巻末の標準正規分布表を使って求めなさい。

●ANSWER

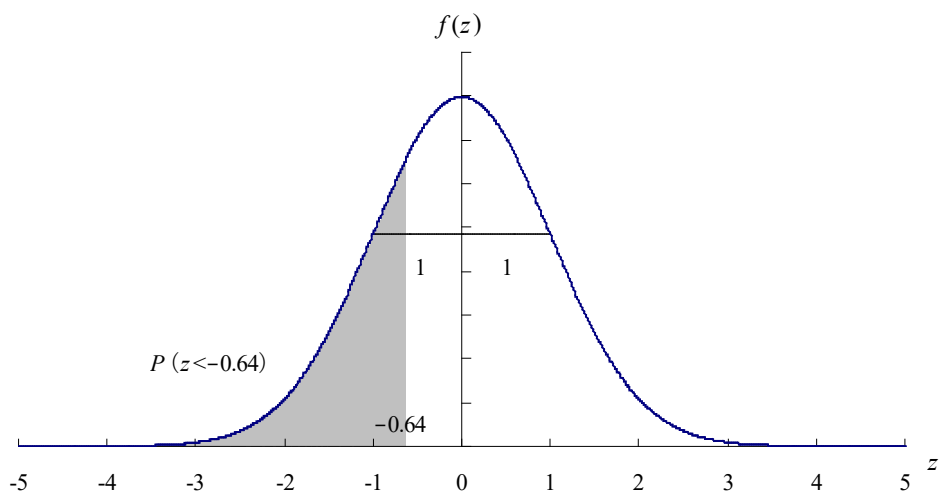
TOPIX の収益率は以下のような正規分布 $x \sim N(8.0\%, 12.5\%^2)$ に近似され、「1 年後の TOPIX の収益率がマイナスとなる確率」は 1 年後の収益率が 0%未満となる確率だから、シャドー部分の面積の割合である。



1年後の収益率が0%未満となる確率を $P(x < 0.0\%)$ と表し標準化する。

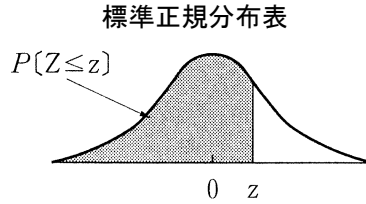
$$P(x < 0.0\%) = P\left(z < \frac{0.0\% - 8.0\%}{12.5\%}\right) = P(z < -0.64)$$

この標準化により、もとの0%は平均0、標準偏差1の標準正規分布上の-0.64となるので、以下のシャド一部分の面積の割合を求めればよい。



巻末の標準正規分布表は、スタンダードな統計学のテキストに添付されるごく一般的なものであり、証券アナリスト試験の問題に添付されるのも、このスタイルである。この標準正規分布表は、①一番左の縦軸は z 値の小数第1位までの数値を与え、一番上の横軸は z 値の小数第2位の数値を与えている、②下方（左側）の部分の面積（確率）を与えている、③中心（平均=0）以上の面積に関してのみ数値を与えている、といった点に注意したい。 $z=0.00$ （つまり中心）のところを読み取ると0.5000（ $=0.5=50\%$ ）となっており、これは平均値以下の面積の割合（=確率）が50%であることを意味する。

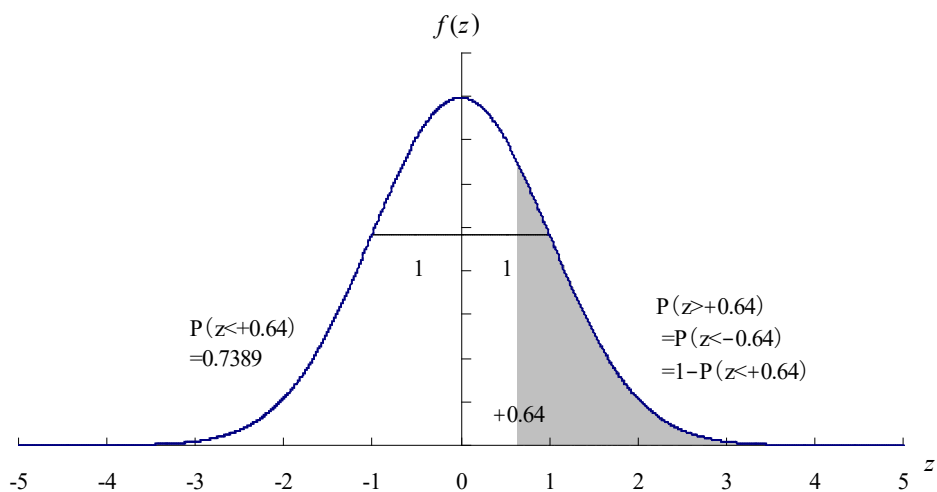
また、表の上に以下のようなグラフが添付されるが、これは上記②、③の内容を示すものである。



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133

この問題の場合 -0.64 を下回る確率をこの表から直接読み取ることとはできない。そこで、正規分布は左右対称で、内部の面積は全体で $1 (=100\%)$ であることを利用する。

-0.64 を下回る部分の面積（確率）は $+0.64$ を上回る部分の面積と同じである。この「 $+0.64$ を上回る部分の面積」も標準正規分布表から直接読み取ることとはできないが、「 $+0.64$ を下回る部分の面積」は標準正規分布表から読み取ることができる。これを全体 $1 (=100\%)$ から引けば、「 $+0.64$ を上回る部分の面積」＝「 -0.64 を下回る部分の面積（確率）」を求めることができる。 $+0.64$ を下回る部分の面積は標準正規分布表から「 0.7389 」と読み取れるので 73.89% である。したがって、 $100\% - 73.89\% = 26.11\%$ となる。



	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133

2 貨幣の時間価値



本節では、債券等についての分析を行うための準備として、貨幣の時間価値について学習する。

1 単利と複利

金利計算には、単利計算と複利計算とがある。単利計算とは、利息は元金のみが生み出し、資金運用期間中に支払われた利息がさらに利息を生み出すことを考慮しない金利計算である。これに対して、複利計算では、元金と資金運用期間中に得られた利息の両方から、利息は生み出されると考える。

いま、元金 X_0 円を、年利 r のもとで運用することを考える。利息は1年ごと（または半年ごと）に支払われるものとしたとき、 n 年後に受け取る元利合計 X_n 円を、単利計算と複利計算（年複利と半年複利）とによって、それぞれ求めてみる。

(1) 単利計算

$$\begin{array}{ll}
 \text{元金} & X_0 \text{ 円} \\
 1 \text{ 年後} & X_1 = X_0 + \underbrace{X_0 \times r}_{\text{1 年後に支払われる利息}} = X_0(1+r) \text{ 円} \\
 2 \text{ 年後} & X_2 = X_0 + X_0 \times r + \underbrace{X_0 \times r}_{\text{2 年後に支払われる利息}} = X_0(1+2r) \text{ 円} \\
 & \vdots \\
 n \text{ 年後} & X_n = X_0 + \underbrace{n \times X_0 \times r}_{\text{n 年間にわたって支払われた利息の合計}} = X_0(1+nr) \text{ 円}
 \end{array}$$

(2) 複利計算

① 年複利のケース

$$\begin{array}{ll}
 \text{元金} & X_0 \text{ 円} \\
 1 \text{ 年後} & X_1 = X_0 + \underbrace{X_0 \times r}_{\text{1 年後に支払われる利息}} = X_0(1+r) \text{ 円} \\
 2 \text{ 年後} & X_2 = X_0(1+r) + \underbrace{X_0(1+r) \times r}_{\text{2 年後に支払われる利息}} = X_0(1+r)^2 \text{ 円} \\
 & \vdots \\
 n \text{ 年後} & X_n = X_0(1+r)^n \text{ 円}
 \end{array}$$

② 半年複利のケース

元金 X_0 円

$$\text{半年後} \quad X_{0.5} = X_0 + \underbrace{X_0 \times \frac{r}{2}}_{\text{半年後に支払われる利息}} = X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right) \text{円}$$

$$1 \text{ 年後} \quad X_1 = X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right) + \underbrace{X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right) \times \frac{r}{2}}_{1 \text{ 年後に支払われる利息}} = X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 \text{円}$$

$$1 \text{ 年半後} \quad X_{1.5} = X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 + \underbrace{X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 \times \frac{r}{2}}_{1 \text{ 年半後に支払われる利息}} = X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^3 \text{円}$$

$$2 \text{ 年後} \quad X_2 = X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^3 + \underbrace{X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^3 \times \frac{r}{2}}_{2 \text{ 年後に支払われる利息}} = X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^4 \text{円}$$

⋮

$$n \text{ 年後} \quad X_n = X_0 \left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2n} \text{円}$$

● QUESTION

元金 100,000 円を、年利 2%のもとで運用したとき、3 年後の受取額（元利合計） X_3 はいくらになるか、単利、年複利、半年複利のそれぞれの場合について計算しなさい。

● ANSWER

1. 単利のケース

$$\begin{aligned} X_3 &= 100,000 + 100,000 \times 0.02 + 100,000 \times 0.02 + 100,000 \times 0.02 \\ &= 100,000 \times (1 + 3 \times 0.02) \\ &= 106,000 \text{ (円)} \end{aligned}$$

2. 年複利のケース

$$\begin{aligned} X_3 &= 100,000 \times (1 + 0.02) \times (1 + 0.02) \times (1 + 0.02) \\ &= 100,000 \times (1 + 0.02)^3 \\ &\doteq 106,121 \text{ (円)} \end{aligned}$$

3. 半年複利のケース

$$\begin{aligned} X_3 &= 100,000 \times \left(1 + \frac{0.02}{2}\right)^2 \times \left(1 + \frac{0.02}{2}\right)^2 \times \left(1 + \frac{0.02}{2}\right)^2 \\ &= 100,000 \times \left(1 + \frac{0.02}{2}\right)^{3 \times 2} \\ &\doteq 106,152 \text{ (円)} \end{aligned}$$

2 投資資産の評価

株式であれ債券であれ、証券投資分析の最も基本的な方法は、投資によってもたらされる将来のキャッシュ・フローを現在時点での価値に割り戻す、という方法である。投資を行なってから、その成果がキャッシュ・フローとなって回収されるまでの時間の価値が貨幣の時間価値であり、この価値を求めることが証券投資分析の最も中心的な課題である。以下、この貨幣の時間価値の考え方をみていこう。

(1) 1 期間の投資評価

現在の 100 万円と等価値の 1 年後の金額はいくらであろうか。いま、1 年後に確実に収益が得られる投資機会として利子率 2% の定期預金しかないものとすれば、現在の 100 万円は 1 年後には、確実に、

$$100 \text{ 万円} \times 1.02 = 102 \text{ 万円}$$

となるから、現在の 100 万円と 1 年後の 102 万円とは等価値といえる。

この例では、100 万円は現在の価値、102 万円は将来の価値、2% は利子率を表しているから、上の式を一般化すると次のようになる。

$$\text{現在価値} \times (1 + \text{利子率}) = 1 \text{ 年後の将来価値} \quad [1.2.1]$$

このように、現在価値と将来価値とは利子率を媒介としてその関係をとらえることができる。この式を変形すれば、

$$\text{現在価値} = \frac{1 \text{ 年後の将来価値}}{1 + \text{利子率}} \quad [1.2.2]$$

となる。つまり、利子率が与えられれば、逆に、将来価値からそれと同等視できる現在価値を計算することができる。

ここで、資金の貸借を考えれば、利子率は通常プラスの値をとるため、 $1 + \text{利子率}$ は 1 より大きい値となり、現在価値は将来価値より小さくなる。そこで、現在価値は将来価値を割り引いていると捉えられる。将来の 1 円の現在価値を **割引係数** (discount factor) といい、ここでは $\frac{1}{1 + \text{利子率}}$ で表される。また、この場合の利子率は **割引率** (discount rate) といい、割り引かれた現在価値を **割引現在価値** と呼ぶ。

(2) 多期間にわたる投資の評価

次に、将来のキャッシュ・フローまでの期間が長いケースを考える。例えば、100万円を2年物の定期預金として預けたとする。利子率が2%で1年後の利子も2%で再投資可能とすると、

$$100 \times 1.02^2 = 104.04 \text{ (万円)}$$

となるから、現在の100万円と2年後の104.04万円は等価値である。これを一般化すると次のようになる。

$$\text{現在価値} \times (1 + \text{利子率})^2 = 2 \text{ 年後の将来価値}$$

この式を変形すれば、

$$\text{現在価値} = \frac{2 \text{ 年後の将来価値}}{(1 + \text{利子率})^2}$$

となり、利子率を割引率と読みかえれば、

$$\text{現在価値} = \frac{2 \text{ 年後の将来価値}}{(1 + \text{割引率})^2}$$

と表される。

以上のことを n 年後にキャッシュ・フローが生まれるケースに拡張すると次のようになる。

$$\text{現在価値} = \frac{n \text{ 年後の将来価値}}{(1 + \text{割引率})^n} \quad [1.2.3]$$

[1.2.3] で $\frac{1}{(1 + \text{割引率})^n}$ は、 n 年後の1円の割引現在価値を表している。つまり、

この式では、 $\frac{1}{(1 + \text{割引率})^n}$ が割引係数である。

● QUESTION

5年後に100万円のキャッシュ・インフローをもたらす投資機会の現在価値はいくらか。ただし、割引率は3%とし、解答は小数第3位を四捨五入して答えなさい。

● ANSWER

$$\text{現在価値} = \frac{100}{(1 + 0.03)^5} = 86.260 \cdots \quad \therefore 86.26 \text{ 万円}$$

(3) キャッシュ・フローを複数期間にわたり生み出す投資の評価—割引現在価値法—

さらに、将来のキャッシュ・フローが複数回発生するケースではどうなるか。この場合は、将来のキャッシュ・フローの割引現在価値が同様に計算できることから、その和として計算すればよい。

いま、今後 n 年間にわたり毎年キャッシュ・フローが生まれるケースを考え、それぞれ $C_1, C_2, \dots, C_n$ とし、割引率を $k_1, k_2, \dots, k_n$ とすると、現在価値 (V_0) は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{現在価値}(V_0) &= \frac{C_1}{1+k_1} + \frac{C_2}{(1+k_2)^2} + \dots + \frac{C_n}{(1+k_n)^n} \\ &= \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+k_t)^t} \\ &= \text{各期のキャッシュ・フローの現在価値の合計} \end{aligned} \quad [1.2.4]$$

●QUESTION

1 年後に 2,000 万円、2 年後に 3,000 万円のキャッシュ・フローをもたらす投資プロジェクトがある。1 年目のキャッシュ・フローに対する割引率が 10%、2 年目のキャッシュ・フローに対する割引率が 11% (年率) のとき、この投資プロジェクトの現在価値を求めなさい。ただし、解答は四捨五入により万円単位で答えなさい。

●ANSWER

$$\text{現在価値} = \frac{2,000}{1.10} + \frac{3,000}{1.11^2} = 4,253.04 \dots \quad \therefore 4,253 \text{ 万円}$$

(4) キャッシュ・フローを複数期間にわたり生み出す投資の収益率—内部収益率—

将来のキャッシュ・フローが複数回発生するケースの投資収益率はどのように測つたらよいであろうか。これについては、「ある投資から将来得られるキャッシュ・フローの割引現在価値をその投資額に等しくするような割引率」を計算すればよい。

いま、収益率 (r) を「ある投資から将来得られるキャッシュ・フローの割引現在価値をその投資額に等しくするような一定の割引率」と捉え、先の式 [1.2.4] で、現在価値を投資額に、各時点のキャッシュ・フローに対する割引率 (k) を収益率 (r) に置き換えて考えると次式のように表すことができる。

$$I = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C_n}{(1+r)^n} \quad [1.2.5]$$

$$\left[\begin{array}{l} r : \text{収益率、} I : \text{投資額} \\ C_i : \text{第} i \text{ (} =1, 2, \dots, n \text{) 期のキャッシュ・フロー} \end{array} \right.$$

この場合の収益率 (r) は、キャッシュ (アウト) フローである投資額 I を回収する収益率であり、**内部収益率** (internal rate of return, IRR) と呼ばれている。

内部収益率は、債券投資の場合には複利利回りに対応し、またパフォーマンス評価においては金額加重収益率に対応する。

また、上記の計算においては、初期に投資をするだけのケースをとりあげているが、追加投資を考えた場合は C_i を第 i 期のネット・キャッシュ・フロー (第 i 期の収入－投資額) とすれば、同様に考えることができる。

●QUESTION

A 社の株式を 1,000 円で購入し、配当として 1 年後に 5 円、2 年後にも 5 円を受け取った直後に、1,200 円で売却できるものとする。

この場合の内部収益率を求めなさい。ただし、解答は%表示で、小数第 3 位を四捨五入しなさい。

●ANSWER

内部収益率とは、「投資額＝将来のキャッシュ・フローの割引現在価値」となる割引率をいうから、

$$1,000 = \frac{5}{1+r} + \frac{5+1,200}{(1+r)^2}$$

を満足する r を求めればよい。

これは、 r についての 2 次式を解くことになるのであるが、解の公式 (巻末付録 3 [2] 1.2 次方程式参照) を使えば解くことができる。

両辺を $(1+r)^2$ 倍して、整理すれば、

$$1,000(1+r)^2 - 5(1+r) - 1,205 = 0$$

となり、 $1+r$ に関する 2 次方程式が得られるから、 $1+r > 0$ に注意すれば、

$$1+r = \frac{5 + \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1,000 \times (-1,205)}}{2 \times 1,000} = 1.10022 \dots$$

$$r = 0.10022 \dots \quad \therefore 10.02\%$$

3 正味現在価値法（NPV 法）

将来受け取るキャッシュフローを、適当な割引率を用いて現在価値に直して投資価値を評価する方法を割引キャッシュフロー法（DCF 法）と言い、キャッシュフローの現在価値から初期投資額を引いた値を**正味現在価値**（Net Present Value, NPV）と呼ぶ。

いま、ある資産が t 年後に生み出すキャッシュフローを C_t ($t=1, 2, \dots, n$) とし、各時点のキャッシュフローに対する割引率を r とすると、その資産の現在価値 PV は次の式で表される。

$$PV = \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n}$$

また、この資産への投資額は、現在 I だけ負担すればよいものとする、この資産に投資することによって得られる正味現在価値 NPV は次の式で表される。

$$NPV = -I + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3} + \dots + \frac{C_n}{(1+r)^n} \quad [1.2.6]$$

正味現在価値は、投資によって生み出される価値（キャッシュフローの現在価値）から、初期投資額を引いたものなので、投資によってどれだけの価値が新たに創造されるかを表している。

こうした投資によって、もし正味現在価値が正（ $NPV > 0$ ）であるような投資を行えば企業価値は増大することになるし、逆に、正味現在価値が負（ $NPV < 0$ ）であるような投資を行えば企業価値は減少することになる。よって、企業価値の最大化を目的とする場合、投資の評価方法を次のように表すことができる。

$NPV > 0$ であれば、投資を行う。

●QUESTION

X社は、現在、投資額1億円のプロジェクトの採否を検討している。このプロジェクトの実行により、今後3年間にわたり毎年4,000万円のキャッシュフローが生まれると予想している。

このプロジェクトのキャッシュフローに対する割引率を年率10%（一定）とすると、このプロジェクトの採否についてどのように判断すべきか。

●ANSWER

このプロジェクトのNPV（正味現在価値）を計算し、その正負でプロジェクトの採否を決定すればよい。

ここで、NPVは

$$NPV = -I + \frac{C_1}{1+r} + \frac{C_2}{(1+r)^2} + \frac{C_3}{(1+r)^3}$$

で求められるから、 $I=1$ （億円） $=10,000$ （万円）、 $C_i=4,000$ （万円）（ $i=1,2,3$ ）、 $r=10\%=0.1$ を代入して、

$$NPV = -10,000 + \frac{4,000}{1+0.1} + \frac{4,000}{(1+0.1)^2} + \frac{4,000}{(1+0.1)^3} = -52.5... < 0$$

NPVが負になるから、このプロジェクトは採用すべきでない。